Matematiska Institutionen, KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, för CDATE, CTFYS och vissa CL, fredagen den 13 mars 2015 kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Vid denna tentamensskrivning får bonuspoäng erhållna under vt 2015 användas. Den som har b bonuspoäng får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b-5$ och 0.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. (a) (1p) Undersök om de tre vektorerna nedan är linjärt oberoende i vektorrummet R^4:
$$\bar{v}_1 = (1\ \ 1\ \ 2\ \ 3)^T, \quad \bar{v}_2 = (1\ \ 0\ \ 1\ \ 3)^T, \quad \bar{v}_3 = (1\ \ 2\ \ 2\ \ 1)^T.$$
   (b) (2p) Låt $\mathbf{A}$ beteckna matrisen
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   Bestäm $\mathbf{A}$:s rang och en bas för $\mathbf{A}$:s nollrum $\mathrm{N}(\mathbf{A})$.

   (c) (2p) Finns det någon matris $\mathbf{B}$ sådan att $\mathrm{N}(\mathbf{B}) = \mathrm{N}(\mathbf{A})$ och vars kolonnrum L är lika med linjära höljet av vektorerna $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$, dvs $L = \mathrm{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$.

2. Låt $\mathbf{A}$ beteckna matrisen
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 4 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$
   (a) (3p) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A}$.

   (b) (2p) Bestäm en diagonalmatris $\mathbf{D}$ och en inverterbar matris $\mathbf{P}$ sådana att $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$.

3. (ON-system) Betrakta det olösbara ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \phantom{x + {}} y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

(a) (3p) Bestäm en ”minstakvadrat”-lösning till systemet ovan.

(b) (2p) Bestäm projektionen av vektorn $(1, 2, 3)$ på delrummet $\text{Span}\{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ till R^3.

DEL II

4. (5p) (ON-system) En parallellepiped har ett hörn P i origo, och de tre angränsande hörnen i punkterna $Q_1 = (2, 2, 4)$, $Q_2 = (1, 3, 1)$ och $Q_3 = (3, 1, 2)$. En projektil avfyras från punkten $S = (-1, -1, -1)$ i riktning mot hörnet P. Projektilen färdes rätlinjigt med den konstanta hastigheten 3 längdenheter per sekund. Under hur lång tid befinner sig projektilen inuti parallellepipeden.

5. (5p) Visa att den kvadratiska formen

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

är positivt semidefinit, och bestäm samtliga taltripplar $(x_1.x_2, x_3)$ sådana att

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

6. (5p) Du får reda på att 3×3-matrisen $\mathbf{Q}$ är en ortogonalmatris vars determinant är lika med 1, och dessutom, för två ickeparallella 3×1-matriser $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ får du reda på resultatet av matrismultiplikationerna $\mathbf{Qx}$ och $\mathbf{Qy}$.

   Räcker denna information för att kunna bestämma $\mathbf{Qz}$ för varje 3×1-matris $\mathbf{z}$?

   (**OBS** Motivera noggrant, avsaknad av korrekt argumentering resulterar i poängavdrag.)

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. Låt π_1 beteckna planet i R^3 med ekvationen $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ och π_2 planet med ekvationen $x_1 - x_3 = 0$. Vi betraktar linjära avbildningar A som avbildar π_1 på π_2, dvs om (x_1, x_2, x_3) tillhör π_1 så gäller att $A(x_1, x_2, x_3)$ tillhör π_2, och omvänt, till varje (y_1, y_2, y_3) i π_2 finns (x_1, x_2, x_3) i π_1 så att $A(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$. Låt A^2 beteckna den sammansatta avbildningen $A \circ A$, A^3 beteckna $A \circ A \circ A$ etc.

   (a) (3p) För vilka positiva hela tal k finns en linjär avbildning A som avbildar π_1 på π_2 och som är sådan att A^k är nollavbildningen, dvs $A^k(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ för alla (x_1, x_2, x_3) i R^3, medan A^{k-1} inte är nollavbildningen.

   (b) (2p) Finns det till varje linjär avbildning B från R^3 till R^3 en linjär avbildning A som avbildar π_1 på π_2 och som är sådan att $A^k = B$ för något positivt heltal k.

8. (5p) Låt $\mathcal{M}_{nm}$ beteckna vektorrummet som består av alla $n \times m$-matriser. Varje $n \times n$-matris $\mathbf{A}$ definerar en linjär avbildning $\Phi_{\mathbf{A}}$ av $\mathcal{M}_{nm}$ på sig själv genom att $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{\mathbf{nm}}$ avbildas på matrisen $\mathbf{AB} \in \mathcal{M}_{\mathbf{nm}}$, dvs $\Phi_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) = \mathbf{AB}$. Undersök om det finns något samband mellan matrisen $\mathbf{A}$:s rang och dimensionen hos kärnan till avbildningen $\Phi_{\mathbf{A}}$. Om ett sådant samband finns skall det anges.