Matematiska Institutionen, KTH

Problem till övning nr 12 den 2 mars, Linjär algebra D1, SF1604, vt 15.

1. (E) Visa att formeln
$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$
gäller för $n = 1, 2, \ldots$.

2. (C) Låt $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ och för $n = 3, 4, \ldots$ låt
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}.$$
Visa att $a_n \leq 3^n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3. (D) Visa att heltalet 6 delar $n^3 + 5n$ för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

4. (E) Vilka av följande kvadratiska former är positivt definita?
   (a) $Q(x, y) = x^2 + y^2$.
   (b) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2$.
   (c) $Q(x, y, z) = xy + 100z^2$.

5. (D) För vilka värden på parametern a är
$$Q(x, y, z) = (x + y + z)^2 + (2x + y + 3z)^2 + (y + az)^2,$$
en positivt definit kvadratisk form.

6. (E) Bestäm en koordinattransformation som överför nedanstående kvadratiska form på huvudaxelform
$$Q(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 10xy - 4xz + 4yz.$$
Är den kvadratiska formen positivt definit?

7. (E) – (A) Valda uppgifter från tentamensskrivningen den 9 juni 2011 som man hittar på adressen http://www.math.kth.se/math/GRU/TENTOR.pdf/5B1109.pdf/SF1604.20110609.Text.pdf.

SVAR

1. –
2. –
3. –
4. (a) Positivt definit.
   (b) Positivt semidefinit.
   (c) Indefinit.
5. $a \neq -1$.
6. Nedanstående matris $\mathbf{Q}$ beskriver en koordinattransformation som överför den givna kvadratiska formen på huvudaxelform:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

   Den kvadratiska formen är positivt semidefinit.