

Matematiska Institutionen,  
KTH

**Problem till övning nr 4 den 30 januari, Linjär algebra D och CL, SF1604, vt 15**

1. Låt  $\bar{u} = (0, 1, 2)$  och  $\bar{v} = (1, -1, -2)$ . Antag att  $\bar{v} \times \bar{w} = (3, 1, 1)$ .

(a) (E) Bestäm

$$\bar{u} \times \bar{v}, \quad \bar{w} \times \bar{v}, \quad \bar{w} \times \bar{w}, \quad (3\bar{u} - 7\bar{w}) \times \bar{v}, \quad \bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$$

(b) (B) Räcker den givna informationen för att bestämma  $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w}$  och  $\bar{w} \times (\bar{v} \times \bar{w})$ .

(c) (C) Finns det någon vektor  $\bar{z}$  sådan att  $\bar{v} \times \bar{z} = (2, 2, 1)$ .

2. (E) Bestäm arean av den triangel som har hörn i punkterna  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 2)$  och  $(1, 3, 1)$ .
3. (E) Ett plan  $\pi$  innehåller punkterna  $R = (1, 1, 1)$ ,  $S = (2, 3, 0)$  och  $T = (0, 1, 2)$ . Bestäm en normal till planet  $\pi$ . Bestäm planets ekvation. Avgör om punkten  $(3, 2, 1)$  tillhör planet. Bestäm ytterligare tre punkter i planet.
4. (E) Bestäm skärningspunkten mellan linjen genom punkterna  $P = (1, 0, -1)$  och  $Q = (1, 2, 4)$  och planet  $\pi$  i uppgift 3.
5. (C) Undersök om det går att hitta ett tal  $a$  sådant att punkterna  $(2, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(-1, 2, 2)$  och  $(3, 2, a)$  ligger i samma plan.
6. (B) Låt  $\bar{u} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\bar{v} = (y_1, y_2, y_3)$  och  $\bar{u} \times \bar{v} = (z_1, z_2, z_3)$ . Visa att

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

om och endast om vektorerna  $\bar{u}$  och  $\bar{v}$  är parallella.

7. (E) Bestäm på parameterform skärningslinjen mellan planen med ekvationerna  $2x - 3y + z = 2$  och  $x - 2y + 3z = 1$ .
8. (C) (ON-system) Planet  $\pi_1$  har normalvektorn  $\bar{n}_1 = (1, -1, 5)$  och planet  $\pi_2$  har normalvektorn  $\bar{n}_2 = (1, 0, 1)$ . Punkten  $P = (0, 2, 3)$  ligger på skärningslinjen  $\ell$  mellan planen. Bestäm en parameterform för linjen  $\ell$ .
9. (D) (ON-system) Bestäm projektionen av vektorerna  $\bar{u} = (-2, 2, 4)$  och  $\bar{w} = (1, 1, 3)$  på planet  $\pi$  med ekvationen

$$2x + y - z = 0,$$

dvs bestäm vektorer  $\bar{v}$  och  $\bar{z}$  som är parallella med planet  $\pi$  och som är sådana att  $\bar{u} - \bar{v}$  resp  $\bar{w} - \bar{z}$  och är vinkelräta mot planet  $\pi$ .

10. (C) (ON-system) Låt  $\pi$  vara ett plan som innehåller linjen  $\ell$  med parameterformen

$$\begin{cases} x &= & 2 & + & t \\ y &= & -1 & + & 2t \\ z &= & 3 & + & t \end{cases}$$

vilket ju också kan skrivas  $(x, y, z) = (2, -1, 3) + t(1, 2, 1)$ . Planet  $\pi$  innehåller också punkten  $P = (1, 1, 0)$ . Bestäm planets ekvation samt ange parameterformen för en rät linje genom  $P$  som ligger i planet  $\pi$  och som är vinkelrät mot  $\ell$ .

11. (C) (ON-system) En boll skickas från punkten  $P = (2, 6, 5)$  i en sådan riktning att den efter en studs i planet  $\pi$  med ekvationen  $x - z = -2$  träffar punkten  $Q = (3, 3, 7)$ . Ange på lämpligt sätt bollens riktning.

12. **Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.**

**SVAR**

1.  $\bar{u} \times \bar{v} = (0, 2, -1)$ ,  $\bar{w} \times \bar{v} = (-3, -1, -1)$ ,  $\bar{w} \times \bar{w} = (0, 0, 0)$ ,  $(3\bar{u} - 7\bar{w}) \times \bar{v} = (21, 13, 4)$ ,  $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (-1, 6, -3)$ . Den givna informationen räcker varken för att bestämma  $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w}$  eller  $\bar{w} \times (\bar{v} \times \bar{w})$ . Finns ingen vektor  $\bar{z}$  sådan att  $\bar{v} \times \bar{z} = (2, 1, 1)$ .
2.  $\frac{1}{2}\sqrt{21}$
3. Normal  $(1, 0, 1)$ . Planets ekvation  $(x - 1) + 0(y - 1) + (z - 1) = 0$  eller hyfsad  $x + z = 2$ . Punkten  $(3, 2, 1)$  tillhör inte planet. Men t ex punkterna  $(2, 0, 0)$ ,  $(2, 7, 0)$  och  $(3, -13, -1)$  gör det.
4.  $(1, 4/5, 1)$ .
5.  $a = 0$ .
6.  $-$
7.  $(x, y, z) = (1, 0, 0) + t(7, 5, 1)$
8.  $(x, y, z) = (0, 2, 3) + t(-1, 4, 1)$
9.  $\bar{v} = (0, 3, 3)$  och  $\bar{z} = (1, 1, 3)$ .
10. Planets ekvation är  $4x - y - 2z = 3$ .  
Sökta linjens parameterform är  $(x, y, z) = (1, 1, 0) + t(1, -2, 3)$ .
11. Bollens riktning är  $(1, -1, 0)$ .