Matematiska Institutionen,
KTH

Problem till övning nr 6 den 6 februari, Linjär algebra D1, SF1604, vt 15.

1. (E) Låt **A** vara matrisen nedan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Bestäm baser för matrisens radrum, kolonnrum och nollrum, samt bestäm matrisens rang.

2. (E) Låt **A** vara matrisen nedan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 9 & a \\ 1 & -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

   Bestäm för varje värde på parametern a rangen hos matrisen **A**.

3. (B) För kvadratiska matrisen **A**, dvs $n \times n$-matrisen **A**, gäller att **A** har full rang, dvs $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$, om och endast om ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ har en unik lösning för varje högerled **b**. Använd detta för att visa att om **A** och **B** är kvadratiska matriser så har produkten **AB** full rang om och endast om både **A** och **B** har full rang. Visa att om **A** har full rang och **B** rang $n-1$ så har **AB** rang $n-1$. Ge exempel på två 3×3-matriser **A** och **B**, båda med rang 3, men sådana att

$$\text{rang}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 1.$$

4. (C) Visa att om för matriserna **A** och **B** gäller att $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ så är **B**'s kolonnrum ett delrum till **A**'s nollrum.

5. (B) Om L och M är två delrum till vektorrummet V så utgör mängden av vektorer som tillhör både L och M ett delrum till V, som betecknas $L \cap M$ och som man kallar snittet av L och M. Bestäm nu två 3-dimensionella delrum L och M till R^4 sådana att $(1,1,1,1)$ tillhör $L \cap M$ samt

$$\dim(L \cap M) = 2.$$

6. Antag att L och M är delrum till vektorrumet V.

   (a) (C) Visa att snittet $L \cap M$ av L och M, (dvs mängden av de vektorer som tillhör både L och M), också är ett delrum till V.

   (b) (A) Visa att om $\dim(V) = n$, $\dim(L) = k$ och $\dim(M) = m$ så är

$$\dim(L \cap M) \geq (k + m) - n.$$

7. (B) Visa att mängden av alla oändliga talföljder $\bar{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ utgör ett vektorrum V över de reella talen om addition av vektorer och multiplikation av en vektor med ett reellt tal λ definieras

$$(x_0, x_1, x_2, \ldots) + (y_0, y_1, y_2, \ldots) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$$

   resp

$$\lambda(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2, \ldots).$$

   Låt L beteckna mängden av alla talföljder $\bar{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ sådana att talen i talföljden efter ett tag samtliga blir noll, dvs mer precist, till varje sådan vektor $\bar{x}$ finns ett tal $N_{\bar{x}}$ sådant att $x_i = 0$ för alla $i \geq N_{\bar{x}}$. Är L ett delrum till vektorrummet V.

8. **Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.**

SVAR

1. Bas för radrummet är t ex de två vektorerna $\bar{r} = (1\ \ 0\ \ -2\ \ 1\ \ 0)$ och $\bar{r}' = (0\ \ 1\ \ -3\ \ 1\ \ -1)$.
   Bas för kolonnrummet är t ex de två kolonnerna

$$\bar{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \bar{k}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Bas för nollrummet är t ex de tre vektorerna

$$\bar{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \bar{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Matrisens rang är 2.

2. Rangen är 3 när $a = 0$ eller $a = 4$. För övrigt är rangen 4.

3. –

4. –

5. Flera möjliga svar, t ex

$$L = \text{span}\{(1,1,1,1), (1,0,0,0), (0,0,1,0)\}, \quad M = \text{span}\{(1,1,1,1), (1,0,0,0), (0,0,0,1)\}$$

6. –

7. –