Matematiska Institutionen, KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, för CDATE, CTFYS och vissa CL, onsdagen den 10 juni 2015 kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. Bonuspoäng förvärvade under läsåret 2014-2015 får användas. Den som har b bonuspoäng får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b-5$ och 0.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger betyget	A

DEL I

1. (5p) Bestäm de värden på talet a för vilka nedanstående ekvationssystem

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + az = 1 \\ ay - 2z = 2 \end{cases}$$

har ingen, precis en respektive oändigt många lösningar. Ange också lösningarna i de fall antalet lösningar är oändligt många.

Lösning. Koefficientmatrisens determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & a & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-1 \\ 0 & a & -2 \end{vmatrix} = 2 - a(a-1) = 2 - a^2 + a = (a+1)(2-a),$$

är lika med noll om och endast om $a = -1$ eller $a = 2$. Vi löser systemet för dessa värden på a. För övriga värden på a har systemet en unik lösning.

För $a = 2$ ger Gausselimination

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \\ 2y - 2z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 2 \\ - y + z = -1 \\ 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

varur $z = t$, $y = t + 1$ och $x = 1 - 2t$, där t kan väljas gotyckligt.

För $a = -1$ ger Gausselimination

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & & & - & z & = & 1 \\ & - & y & - & 2z & = & 2 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & - & y & - & 2z & = & 2 \\ & - & y & - & 2z & = & 2 \end{array}\right.$$

varur $z = t$, $y = 2t + 2$ och $x = -3 - 3t$, där t kan väljas gotyckligt.

2. (a) (2p) Det finns ett reellt tal α sådant att $(1+i)^{23} = \alpha(1-i)^{-15}$. Bestäm talet α.

Lösning. Då $(1+i)(1-i) = 2$ får vi

$$\alpha = (1+i)^8(1+i)^{15}(1-i)^{15} = (1+i)^8 2^{15}.$$

Övergång till polära koordinater ger

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))^8 = 2^4(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 2^4$$

SVAR: 2^{19}.

(b) (3p) Visa med ett induktionsbevis att talet 12 delar $7^{2n} - 5^{2n}$ för alla positiva hela tal n.

Lösning. Påståendet är sant när $n = 1$ ty

$$7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24 = 2 \cdot 12.$$

Vi visar nu att nedanstående implikation är sann för alla hela tal $n \geq 1$

$$7^{2n} - 5^{2n} = k \cdot 12 \qquad \Longrightarrow \qquad 7^{2(n+1)} - 5^{2(n+1)} = k' \cdot 12$$

där k och k' är hela tal.

$$7^{2n} - 5^{2n} = k \cdot 12 \qquad \Longrightarrow \qquad 7^{2n} = 5^{2n} + k \cdot 12 \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} 7^{2(n+1)} - 5^{2(n+1)} = 7^2 \cdot 7^{2n} - 5^{2(n+1)} &= 7^2(5^{2n} + k \cdot 12) - 5^2 5^{2n} = \\ &= 24 \cdot 5^{2n} - 49k12 = (2 \cdot 5^{2n} - 49k)12, \end{aligned}$$

dvs den givna implikationen är visad.
Av induktionsaxiomet följer nu att 12 delar $7^{2n} - 5^{2n}$ för alla naturliga tal $n \geq 1$

3. (5p) (ON-system) Låt π_1 beteckna planet med ekvationen $x + 2y + 3z = 6$, och π_2 ett plan genom punkterna $(0, 1, 1)$ och $(1, 0, -1)$ och vinkelrätt mot planet π_1. Låt ℓ beteckna skärninglinjen mellan planen π_1 och π_2. Bestäm avståndet från punkten $P = (1, 1, 1)$ till linjen ℓ. (Dellösningar kommer att ge delpoäng.)

Lösning. Punkten $P = (1, 1, 1)$ tillhör planet π_1 eftersom punktens koordinater satisfierar planets ekvation: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 6$. Eftersom planet π_2 är vinkelrät mot planet π_1 så blir kortaste avståndet från P till linjen ℓ lika med P:s avstånd till planet π_2.

Vi behöver en normal till planet π_2. Planet π_1:s normal $\bar{n}_1 = (1, 2, 3)$ är parallell med planet π_2 liksom vektorn mellan punterna $Q = (0, 1, 1)$ och $R = (1, 0, -1)$ i planet π_2. Kryssprodukten ger nu en normal till π_2:

$$\bar{n}_2 = \bar{n}_1 \times \overline{QR} = (1, 2, 3) \times (1, -1, -2) = (-1, 5, -3)$$

Avståndet från P till planet ges nu t ex av längden av projektionen av vektorn $\overline{QP}$ på π_2:s normal $\bar{n}_2 = (-1, 5, -3)$. Enligt känd formel har vi

$$\mathrm{Proj}_{\bar{n}_2}(\overline{QP}) = \frac{\bar{n}_2 \cdot \overline{QP}}{\bar{n}_2 \cdot \bar{n}_2}\bar{n}_2 = \frac{(-1, 5, -3) \cdot (1, 0, 0)}{(-1, 5, -3) \cdot (-1, 5, -3)}(-1, 5, -3) =$$

$$= \frac{-1}{(-1)^2 + 5^2 + (-3)^2}(-1, 5, -3) = \frac{-1}{35}(-1, 5, -3)$$

Eftersom längden av denna vektor är $1/\sqrt{35}$ får vi

SVAR: $1\sqrt{35}$

DEL II

4. Matrisen $\mathbf{A}$ har egenvärdena $1, 2$ och 3. Egenvektorer som hör till dessa egenvärden är, respektive

$$\mathbf{v}_1 = (1 \;\; 1 \;\; -1)^T, \quad \mathbf{v}_2 = (2 \;\; 1 \;\; 0)^T, \quad \mathbf{v}_3 = (-2 \;\; -2 \;\; 3)^T.$$

(a) (3p) Bestäm matrisen $\mathbf{A}$.

Lösning. Vi anänder "Martins metod" för att bestämma matrisen $\mathbf{A}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & -6 & -6 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 4 & 4 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 7 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -4 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 7 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & -8 & 12 \end{array}\right)$$

Så

SVAR:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -4 \\ 5 & -8 & -4 \\ -6 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

(b) (2p) Bestäm $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3)$.

Lösning. Vet att om matrisen $\mathbf{A}$ är inverterbar och $\mathbf{A}\bar{v} = \lambda\bar{v}$ så $\bar{v} = \mathbf{A}^{-1}\lambda\bar{v}$. Eftersom 3×3-matrisen $\mathbf{A}$:s tre egenvärden är skilda från noll så är $\mathbf{A}$ inverterbar. Vi får därför

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3) = \mathbf{A}^{-1}\bar{v}_1 + \mathbf{A}^{-1}2\bar{v}_2 + \mathbf{A}^{-1}3\bar{v}_3 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 =$$

$$(1 \;\; 1 \;\; -1)^T + (2 \;\; 1 \;\; 0)^T + (-2 \;\; -2 \;\; 3)^T = (1 \;\; 0 \;\; 2)^T$$

vilket är svaret på denna uppgift.

5. Betrakta vektorrummet $\mathcal{P}$ bestående av alla polynom med reella koefficienter. Vi inför en inre produkt $\langle\, p(t) \mid q(t)\rangle$ i vektorrummet $\mathcal{P}$ genom

$$\langle\ p(t)\ \mid\ q(t)\ \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\ \mathrm{dt}\,.$$

Bestäm projektionen av polynomet t^3 på det delrum L till $\mathcal{P}$, som spänns upp av polynomen $-1+t+2t^2$ och t.

Lösning. Vi skapar först, med hjälp av Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod, en ortogonal för delrummet L:

Sätt $\bar{e}_1 = t$ och sök λ så att $\bar{e}_2 = (-1+t+2t^2) - \lambda t$ är ortogonal mot $\bar{e}_1 = t$, dvs

$$0 = \int_{-1}^{1} (-1+t+2t^2-\lambda t)t\mathrm{dt} = \int_{-1}^{1} (-t+t^2+2t^3-\lambda t^2)\mathrm{dt}$$

Eftersom intervallet är symmetriskt kring origo är integralen ovan lätt att beräkna och vi får villkoret

$$0 = \int_{-1}^{1} (1-\lambda)t^2\mathrm{dt} = (1-\lambda)\frac{2}{3}.$$

Så $\lambda = 1$ och ortogonalbasen består av vektorerna

$$\bar{e}_1 = t \qquad \text{och} \qquad \bar{e}_2 = -1+2t^2.$$

Vi kan nu använda projektionsformeln och får

$$\mathrm{Proj}_L(t^2) = \frac{\langle\ t^3 \mid t\ \rangle}{\langle\ t \mid t\ \rangle}t + \frac{\langle\ t^3 \mid -1+t^2\ \rangle}{\langle\ -1+t^2 \mid -1+t^2\ \rangle}(-1+2t^2)$$

Återigen kan vi utnyttja att integrationsintervallet är symmetriskt och får

$$\mathrm{Proj}_L(t^2) = \frac{\langle\ t^3 \mid t\ \rangle}{\langle\ t \mid t\ \rangle}t + 0\cdot(-1+2t^2) = \frac{\int_{-1}^{1}\ t^4\mathrm{dt}}{\int_{-1}^{1}\ t^2\mathrm{dt}}t = \frac{2/5}{2/3}t = \frac{3}{5}t.$$

SVAR: $3t/5$.

6. (5p) För vilka reella tal b och c finns det en linjär avbildning A från R^3 till R^3 sådan att A avbildar vektorn $(3,2,1)$ på vektorn $(3,b,c)$, samt snittet mellan A:s kärna och A:s bildrum är det delrum till R^3 som genereras av $(1,2,3)$, samt att $A\circ A$ är nollavbildningen, dvs

$$A(3,2,1) = (3,b,c), \quad \ker(A)\cap\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}\{(1,2,3)\}, \quad A\circ A(\bar{x}) = \bar{0},$$

för alla vektorer $\bar{x} \in R^3$.

(**OBS** Motivera ditt svar noggrant, avsaknad av korrekt argumentering resulterar i poängavdrag.)

Lösning. Om $\dim(\ker(A)) = 1$ så försvinner högst en dimension varje gång avbildningen A appliceras. Eftersom R^3 har dimension 3 så måste således $\dim(\ker(A)) = 2$

om $A \circ A$ skall vara nollavbildningen och A inte är nollavbildningen. Dimensionssatsen ger då att $\dim(\mathrm{im}(A)) = 3 - 2 = 1$, och vi kan sluta att

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}\{(1, 2, 3)\}.$$

Par definition så gäller att $A(3, 2, 1) \in \mathrm{im}(A)$, dvs

$$A(3, 2, 1) = (3, b, c) = t(1, 2, 3)$$

för något reellt tal t. Då tydligen $t \cdot 1 = 3$ så är enda möjliga t-värdet $t = 3$, och

$$A(3, 2, 1) = (3, b, c) = t(1, 2, 3) = 3(1, 2, 3) = (3, 6, 9).$$

För att A skall existera måste $b = 6$ och $c = 9$.

Återstår att visa att en avbildning A med dessa egenskaper också existerar. För den skull definierar vi nu en lämplig linjär avbildning A på en bas för R^3 genom

$$A(3, 2, 1) = (3, 6, 9), \quad A(3, 6, 9) = (0, 0, 0), \quad A(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Eftersom

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

så är de tre givna vektorerna en bas för R^3. Låt

$$\bar{x} = x_1(3, 2, 1) + x_2(3, 6, 9) + x_3(0, 0, 1)$$

vara en godtycklig vektor i R^3. Då gäller

$$A \circ A(\bar{x}) = x_1 A \circ A(3, 2, 1) + x_2 A \circ A(3, 6, 9) + x_3 A \circ A(0, 0, 1) =$$

$$x_1 A(3, 6, 9) + x_2 A(0, 0, 0) + x_3 A(0, 0, 0) = x_1(0, 0, 0) + x_2(0, 0, 0) + x_3(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

dvs $A \circ A$ är nollavbildningen. Av räkningarna ovan framgår också att

$$A(\bar{x}) = x_1(3, 6, 9)$$

dvs $\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}\{(3, 6, 9)\} = \mathrm{span}\{(1, 2, 3)\}$. Eftersom dessutom $(1, 2, 3) \in \ker(A)$ så $\mathrm{im}(A) \subseteq \ker(A)$ och därmed uppfyller A de givna kraven.

SVAR: $b = 6$ och $c = 9$.

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. (a) (1p) Betrakta vektorrummet R^5 och låt $U = \mathrm{span}\{(1, 1, 1, 1, 0), (0, 1, 2, -1, 2)\}$, och $V = \mathrm{span}\{(1, 0, 1, 0, -2), (-3, 1, 1, 1, -1)\}$. Visa att det finns ett 3-dimensionellt delrum W till R^5 som innehåller V och vars skärning med U är nollvektorn, dvs $V \subseteq W$ och $W \cap U = \{\bar{0}\}$.

Lösning. Vi visar först att de fyra uppspännade vektorerna ovan är linjärt oberoende och kompletterar med en vektor till en bas för hela rummet R^5. Nedanstående algoritm ger detta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ur tablån framgår att de fyra första kolonnerna är linjärt oberoende och att den sista kolonnen inte är en linjärkombination av de fyra första kolonnerna. Vi låter nu

$$W = \operatorname{span}\{(1,0,1,0,-2), (-3,1,1,1,-1), (0,0,0,0,1)\}$$

Detta delrum W uppfyller specifikationen nedan, enligt lösningen av deluppgift b) nedan.

(b) (4p) Ge nödvändiga och tillräckliga villkor för att det till två delrum U och V till ett ändligtdimensionellt vektorrum L finns ett delrum W till L sådant att

$$W \cap U = \{\bar{0}\}, \qquad V \subseteq W, \qquad \dim(U) + \dim(W) = \dim(L).$$

Motivera väl!

Lösning. Vi visar att det räcker att $U \cap V = \{\bar{0}\}$ för att ett vektorrum W enligt givna specifikationen skall existera. Detta villkor är givetvis nödvändigt. Låt $\bar{e}_1$, ..., $\bar{e}_t$ vara en bas för U och $\bar{e}_{t+1}$, ..., $\bar{e}_{t+s}$ vara en bas för V. Då är dessa $t+s$ vektorer linjärt oberoende, ty om

$$\lambda_1 \bar{e}_1 + \cdots + \lambda_t \bar{e}_t + \mu_1 \bar{e}_{t+1} + \cdots + \mu_s \bar{e}_{t+s} = \bar{0},$$

så

$$\lambda_1 \bar{e}_1 + \cdots + \lambda_t \bar{e}_t = -\mu_1 \bar{e}_{t+1} - \cdots - \mu_s \bar{e}_{t+s}.$$

Vänstra ledet ovan tillhör U och högra ledet V, men snittet av U och V är bara nollvektorn, så

$$\lambda_1 \bar{e}_1 + \cdots + \lambda_t \bar{e}_t = \bar{0} = -\mu_1 \bar{e}_{t+1} - \cdots - \mu_s \bar{e}_{t+s}.$$

vilket då ger att

$$\lambda_1 = 0, \; \ldots \; , \lambda_t = 0, \qquad \mu_1 = 0, \; \ldots, \; \mu_s = 0$$

eftersom respektive uppsättning vektorer är baser för U respektive V.

Vi kompletterar nu den linjärt oberoende uppsättningen av $s+t$ vektorer $\bar{e}_1$, ..., $\bar{e}_{s+t}$ med vektorer $\bar{e}_{t+s+1}$, ..., $\bar{e}_n$ till en bas för L ($\dim(L) = n$). Låt

$$W = \text{span}\{\bar{e}_{t+1}, \dots, \bar{e}_n\}.$$

Detta delrum till L uppfyller de givna förutsättningarna, eftersom

$$\dim(W) = n - t,$$

$$V = \text{span}\{\bar{e}_{t+1}, \dots, \bar{e}_{t+s}\} \subseteq \text{span}\{\bar{e}_{t+1}, \dots, \bar{e}_n\} = W,$$

samt

$$U \cap W = \text{span}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_t\} \cap \text{span}\{\bar{e}_{t+1}, \dots, \bar{e}_n\} = \{\bar{0}\},$$

eftersom de n vektorerna $\bar{e}_1$, ..., $\bar{e}_n$ är linjärt oberoende.

8. (5p) I vanliga 3-dimensionella rummet R^3 är det lätt att förstå innebörden av att två punkter befinner sig på olika sidor om ett 2-dimensionellt delrum till R^3. I högre dimensioner är det kanske svårare att se detta. Skriv, berätta och diskutera om det går att generalisera bergreppet ”på olika sidor om ett delrum” till högre dimensionell geometri. Om så är fallet försök också ge en formel med vars hjälp man kan avgöra detta för två punkter P och Q relativt ett delrum L.

Lösning. Med att två punkter P och Q ligger på olika sidor om ett delrum L menar vi att varje kontinuerlig kurva mellan dessa punkter innehåller en punkt i L.

Vi visar först att om L är ett $(n-1)$-dimensionellt delrum till det n-dimensionella vektorrummet R^n så kan man definiera vad som menas med att två punkter ligger på samma sida om L. Låt $\bar{e}_1$, ..., $\bar{e}_{n-1}$ vara en bas för L och utvidga med en vektor $\bar{e}_n$ till en bas för V. Om vektorn $\bar{v}$ med koordinaterna $(x_1, \dots, x_n)$ i denna bas är sådan att $x_n > 0$ så definerar vi punkten $P = (x_1, \dots, x_n)$ som placerad ovanför L, om $x_n < 0$ så säger vi att P ligger under planet. Om vi rör oss längs en kontinuerlig kurva och startar i en punkt med en positiv x_n-koordinat och slutar i en punkt med negativ x_n-koordinat kommer vi att passera en punkt där $x_n = 0$, dvs en punkt som ligger i delrummet L.

Ett enkelt test får vi efter att ha infört standardskalärprodukten i R^n. Med $\bar{n} = (A_1, \dots, A_n)$ som bas för L:s ortogonala komplement $L^\perp$, och med $\bar{e}_n = \bar{n}$ har vi

$$x_n = \frac{\langle \bar{v}, \bar{n} \rangle}{\langle \bar{n}, \bar{n} \rangle}, \tag{1}$$

och, eftersom $\langle \bar{n}, \bar{n} \rangle > 0$ så

$$x_n > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n > 0.$$

Låt $\bar{e}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$, för $i = 1, 2, \dots, n-1$. Med

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \cdots & \bar{e}_n \\ x_{11} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n-1,1} & \cdots & x_{n-1,n} \end{vmatrix} = A_1 \bar{e}_1 + \cdots + A_n \bar{e}_n$$

blir, på samma sätt som i det 3-dimensionella fallet, $\bar{n}$ en normal till L. Vi får också

$$\bar{n} \cdot \bar{v} = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_{11} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n-1,1} & \cdots & x_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Tecknet på denna determinant avgör alltså vilken sida om L som punkten P ligger.

I fallet $\dim(L) = t < n - 1$ kan man inte definiera olika sidor till delrummet L. Nämligen, låt $\bar{e}_1$, ..., $\bar{e}_n$ vara en bas för R^n sådan att $\bar{e}_{n-t+1}$, ..., $\bar{e}_n$ utgör en bas för L. Antag att varken $P = (x_1, \ldots, x_n)$ eller $Q = (x'_1, \ldots, x'_n)$ tillhör L. Notera att L består av de punkter vars första $n - t$ koordinater x_1, ..., x_{n-t} samtliga är lika med noll. Vi kan då förflytta oss från P till Q utan att passera L genom att först "röra" oss i $L' = \text{span}\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{n-t}\}$ utan att passera "origo" i L', och sedan "flytta oss i höjdled" tills vi kommer till punkten Q. (Mer strikt skulle vi kunna betrakta räta linjen som passerar genom P och Q. Om denna linje skulle innehålla en punkt i L skulle vi, eftersom vi har minst två dimensioner i L' kunna kombinera två räta linjer som skär varandra i en punkt $R \notin L$ och som startar i P och respektive slutar i Q, och som inte passerar genom L.). Det går således inte att dela in mängden punkter i R^n i tre delmängder, punkter i L, punkter i en mängd "upp" och punkter i en mängd "ned", eftersom mellan varje par av två punkter utanför L finns, i detta fall, minst en kurva som inte passerar L.

Det oändligtdimensionella fallet är analogt; om till delrummet L finns ett delrum K av dimension 1 sådant att varje vektor på ett unikt sätt kan skrivas som en linjärkombination av en vektor i K och en vektor i L så kan man definera en ovansida och en undersida till L liksom i det först behandlade fallet ovan. Om vektorrummet kan förses med en inre produkt och K spänns upp av vektorn $(A_1, \ldots, A_n)$ fungerar även det ovan angivna testet i ekvation (1).