Matematiska Institutionen, KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, för CDATE, CTFYS och vissa CL, fredagen den 13 mars 2015 kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Vid denna tentamensskrivning får bonuspoäng erhållna under vt 2015 användas. Den som har b bonuspoäng får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b-5$ och 0.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. (a) (1p) Undersök om de tre vektorerna nedan är linjärt oberoende i vektorrummet R^4:

$$\bar{v}_1 = (1\ \ 1\ \ 2\ \ 3)^T, \quad \bar{v}_2 = (1\ \ 0\ \ 1\ \ 3)^T, \quad \bar{v}_3 = (1\ \ 2\ \ 2\ \ 1)^T.$$

Lösning. Vi undersöker om nedanstående likhet har icke-triviala lösningar

$$\lambda_1(1\ \ 1\ \ 2\ \ 3)^T + \lambda_2(1\ \ 0\ \ 1\ \ 3)^T + \lambda_3(1\ \ 2\ \ 2\ \ 1)^T = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T.$$

Vi räknar i tablåform nedan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Enda lösningen är den triviala, så

SVAR: De tre vektorerna är linjärt oeroende.

(b) (2p) Låt $\mathbf{A}$ beteckna matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestäm $\mathbf{A}$:s rang och en bas för $\mathbf{A}$:s nollrum $\mathrm{N}(\mathbf{A})$.

Lösning. Vanliga algoritmen ger

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser ur sluttablå att givna matrisens rang är 3, samt att nollrummet består av vektorerna

$$(3t - s, -4t + s, -2t, s, t) = t(3, -4, -2, 0, 1) + s(-1, 1, 0, 1, 0)$$

så en bas för matrisens nollrum är t ex $(3, -4, -2, 0, 1)$ och $(-1, 1, 0, 1, 0)$.

(c) (2p) Finns det någon matris $\mathbf{B}$ sådan att $\mathrm{N}(\mathbf{B}) = \mathrm{N}(\mathbf{A})$ och vars kolonnrum L är lika med linjära höljet av vektorerna $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$, dvs $L = \mathrm{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$.

Lösning. Eftersom elementära radoperationer inte ändrar radrummet hos en matris så framgår av lösningen ovan att nedanstående vektor tillhör matrisens radrum

$$3(1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; -3) + 3(0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 4) + (0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 2) = (3 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 5)$$

Matrisen $\mathbf{B}$ nedan har samma radrum som matrisen $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Eftersom en matris nollrum är ortogonala komplementet till radrummet har $\mathbf{B}$ samma nollrum som $\mathbf{A}$. Matrisens kolonnrum har samma dimension som dess radrum, dvs dimensionen hos kolonnrummet är tre. Vi vet att de tre första kolonnerna är linjärt oberoende och därmed en bas för kolonnrummet, varur kolonnrummet är linjära höljet av dessa kolonner.

2. Låt $\mathbf{A}$ beteckna matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 4 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) (3p) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A}$.

Lösning. Karakteristiska ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & 2 \\ 2 & -5-\lambda & 3 \\ 4 & -10 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & -\lambda \\ 2 & -5-\lambda & -\lambda \\ 4 & -10 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & 1 \\ 2 & -5-\lambda & 1 \\ 4 & -10 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda\begin{vmatrix} -2-\lambda & 6 & 0 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 4 & -10 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda\,((5-\lambda)(-2-\lambda)+12) = -\lambda\,(\lambda^2-3\lambda+2)$$

har rötterna $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ och $\lambda = 2$, vilka då är matrisens egenvärden.

Egenvektorer är lösningar till de homogena systemen $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för respektive egenvärde. Vi får

för $\lambda = 0$ systemet

$$\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \\ 4x - 10y + 6z = 0 \end{cases}$$

med lösningarna $E_0 = \text{span}\{(1,1,1)\}$.

för $\lambda = 1$ systemet

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = 0 \\ 2x - 6y + 3z = 0 \\ 4x - 10y + 5z = 0 \end{cases}$$

med lösningarna $E_1 = \text{span}\{(0,1,2)\}$.

för $\lambda = 2$ systemet

$$\begin{cases} - 4y + 2z = 0 \\ 2x - 7y + 3z = 0 \\ 4x - 10y + 4z = 0 \end{cases}$$

med lösningarna $E_2 = \text{span}\{(1,2,4)\}$.

(b) (2p) Bestäm en diagonalmatris $\mathbf{D}$ och en inverterbar matris $\mathbf{P}$ sådana att $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$.

Lösning. Om vi låter $\mathbf{D}$ och $\mathbf{P}$ vara enligt nedan gäller enligt kända samband det ovan angivna förhållandet

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. (ON-system) Betrakta det olösbara ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

(a) (3p) Bestäm en ”minstakvadrat”-lösning till systemet ovan.

Lösning. Låt $\mathbf{A}$ beteckna matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En minsta kvadratlösning till systemet ges då av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Då

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

får vi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) (2p) Bestäm projektionen av vektorn $(1, 2, 3)$ på delrummet $\text{Span}\{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ till R^3.

Lösning. Enligt känd formel, och med beteckningar enligt ovan, ges projektionen av

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som enligt ovan då blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Så

SVAR: $(2, 2, 2)$.

DEL II

4. (5p) (ON-system) En parallellepiped har ett hörn P i origo, och de tre angränsande hörnen i punkterna $Q_1 = (2, 2, 4)$, $Q_2 = (1, 3, 1)$ och $Q_3 = (3, 1, 2)$. En projektil avfyras från punkten $S = (-1, -1, -1)$ i riktning mot hörnet P. Projektilen färdes rätlinjigt med den konstanta hastigheten 3 längdenheter per sekund. Under hur lång tid befinner sig projektilen inuti parallellepipeden.

   Lösning. En punkt inuti parallellepipeden kan nås genom att man från hörnet P följer kanten PQ_1 sen viker av parallellt med vektorn PQ_2 tillräckligt lång för att sedan kunna följa riktningen av vektorn PQ_3 för att tillslut nå punkten. Alltså punkten (x_1, x_2, x_3) ligger inuti parallellepipeden, eller på dess sidor, om och endast om

$$(x_1, x_2, x_3) = t_1 PQ_1 + t_2 PQ_2 + t_3 PQ_3 \quad \text{där} \quad 0 \le t_1 \le 1,\ 0 \le t_2 \le 1,\ 0 \le t_3 \le 1$$

Projektilen besöker punkter med koordinater (a, a, a), eftersom den avfyras från punkten $(-1, -1, -1)$ i riktning $(1, 1, 1)$ mot origo. Vi skriver nu (a, a, a) som en linjärkombination

$$(a, a, a) = t_1 PQ_1 + t_2 PQ_2 + t_3 PQ_3 = t_1(2, 2, 4) + t_2(1, 3, 1) + t_3(3, 1, 2)$$

vilket ger systemet, med nedanstående tablå och lösning:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & a \\ 2 & 3 & 1 & a \\ 4 & 1 & 2 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & a \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -a \end{array}\right).$$

Så

$$t_3 = \frac{a}{5}, \quad t_2 = \frac{a}{5}, \quad t_1 = \frac{a}{10}.$$

varur för a i intervallet $0 \le a \le 5$ (eftersom precis då är $0 \le t_i \le 1$, för $i = 1, 2, 3$), punkterna (a, a, a) är de punkter projektilen möter i parallellepipeden. Så projektilen lämnar parallellepipeden i punkten $(5, 5, 5)$ och har då från origo färdats en sträcka som är lika med längden av vektorn $(5, 5, 5)$, dvs

$$||(5, 5, 5)|| = \sqrt{3(5)^2} = 5\sqrt{3}\,\text{le}.$$

Tiden detta tar är då

SVAR: $5/\sqrt{3}$ sekunder.

5. (5p) Visa att den kvadratiska formen

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

är positivt semidefinit, och bestäm samtliga taltripplar $(x_1 . x_2, x_3)$ sådana att

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Lösning. Vi beskriver den kvadratiska med hjälp av en symmetrisk matris:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Egenvärden till den symmetriska matrisen erhålles från den karakterisiska ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 4-\lambda \\ -1 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda)\lambda$$

varur egenvärdena $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ och $\lambda_3 = 0$. Med tillhörande ON-bas av egenvektorer $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ kan vi skriva den givna kvadratiska formen på huvudaxelform

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + 4y_2^2 + 0y_3^2$$

där enligt känd formel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Av ovanstående ser vi att den kvadratiska formen aldrig kan vara mindre än noll, och att den är lika med noll precis då både $y_1 = 0$ och $y_2 = 0$, men y_3 kan vara vilket reellt tal t som helst, dvs när

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} | \\ \bar{e}_3 \\ | \end{pmatrix}$$

Egenvektorn $\bar{e}_3$ är en lösning till systemet

$$\begin{cases} 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{cases}$$

dvs finns i egenrummet $E_0 = \text{span}\{(1, 2, -1)\}$, vilket ju också består av de (x_1, x_2, x_3) som ger värdet noll i den kvadratiska formen.

6. (5p) Du får reda på att 3×3-matrisen $\mathbf{Q}$ är en ortogonalmatris vars determinant är lika med 1, och dessutom, för två ickeparallella 3×1-matriser $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ får du reda på resultatet av matrismultiplikationerna $\mathbf{Qx}$ och $\mathbf{Qy}$.

   Räcker denna information för att kunna bestämma $\mathbf{Qz}$ för varje 3×1-matris $\mathbf{z}$?

   (**OBS** Motivera noggrant, avsaknad av korrekt argumentering resulterar i poängavdrag.)
   Lösning. Svaret är ja, och motiveringen är som följer. Låt $\mathbf{e}$ vara en vektor som är

   vinkelrät mot både $\bar{x}$ och $\bar{y}$ och som har längd 1. För ortoganalmatriser $\mathbf{Q}$ gäller att vinkeln mellan vektorernaa $\mathbf{Qu}$ och $\mathbf{Qv}$ är densamma som mellan vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ samt att längden av vektorn $\mathbf{Qu}$ är densamma som längden av vektorn $\mathbf{u}$. Alltså är vektorn $\mathbf{f} = \mathbf{Qe}$ en vektor av längd 1 som är vinkelrät mot både $\mathbf{Qx}$ och $\mathbf{Qy}$. Det finns två möjliga sådana vektorer $\mathbf{f}$, vilken avgörs av tecknet för $\det(\mathbf{Q})$.

   Vi fann att informationen räckte för att bestämma $\mathbf{Qe}$. Vektorerna $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ och $\mathbf{e}$ är linjär oberoende i den 3-dimensionella vektorrummet R^3 och därmed en bas för R^3. För en godtycklig vektor $\mathbf{z}$ i R^3 gäller då att

$$\mathbf{z} = \lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{y} + \lambda_3 \mathbf{e}$$

   för några reella tal λ_1, λ_2 och λ_3. Räknelagarna vid matrismultiplika ger nu att

$$\mathbf{Qz} = \lambda_1 \mathbf{Qx} + \lambda_2 \mathbf{Qy} + \lambda_3 \mathbf{Qe}$$

   och således kan $\mathbf{Qz}$ bestämmas.

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. Låt π_1 beteckna planet i R^3 med ekvationen $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ och π_2 planet med ekvationen $x_1 - x_3 = 0$. Vi betraktar linjära avbildningar A som avbildar π_1 på π_2, dvs om (x_1, x_2, x_3) tillhör π_1 så gäller att $A(x_1, x_2, x_3)$ tillhör π_2, och omvänt, till varje (y_1, y_2, y_3) i π_2 finns (x_1, x_2, x_3) i π_1 så att $A(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$. Låt A^2 beteckna den sammansatta avbildningen $A \circ A$, A^3 beteckna $A \circ A \circ A$ etc.

   (a) (3p) För vilka positiva hela tal k finns en linjär avbildning A som avbildar π_1 på π_2 och som är sådan att A^k är nollavbildningen, dvs $A^k(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ för alla (x_1, x_2, x_3) i R^3, medan A^{k-1} inte är nollavbildningen.

   Lösning. Avbildningen A måste ha en icketrivial kärna och denna kärna måste vara innehållen i π_2 annars skulle A^k, för varje heltal k, avbilda A:s bildrum π_2 på sig själv. Dimensionssatsen ger att denna kärna har dimension 1, ty om kärnans dimension vore större skulle A:s bildrum ha en dimension mindre än 2.

   Vi väljer nu en bas för R^3 och representerar A med en matris relativt denna bas. Vi låter $\bar{e}_1$ vara en bas för A:s kärna, $\bar{e}_2$ vara parallell med skärningslinjen mellan π_1 och π_2, samt $\bar{e}_3$ vara en vektor i π_1 som inte är parallell med $\bar{e}_2$. Då gäller

   $$A\bar{e}_1 = \bar{0}, \quad A\bar{e}_2 = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2, \quad A\bar{e}_3 = c\bar{e}_1 + d\bar{e}_2$$

   för några reella tal a, b, c och d, efters π_2 är A:s bildrum. Avbildningen A kan alltså representeras med matrisen

   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Avbildningen A^k representeras då med matrisen

   $$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 0 & x_k & y_k \\ 0 & b^k & z_k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   för några tal x_k, y_k och z_k. Alltså måste b vara lika med noll om A^k är nollavbildningen. Då gäller

   $$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ad \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Om $ad = 0$ är minst ett av talen a eller d lika med noll och då har $\mathbf{A}$ ett nollrum vars dimension är 2.

   SVAR: Enda möjligheten är att $k = 3$.

(b) (2p) Finns det till varje linjär avbildning B från R^3 till R^3 en linjär avbildning A som avbildar π_1 på π_2 och som är sådan att $A^k = B$ för något positivt heltal k.

Lösning. Svaret är nej. Låt B vara en linjär avbildning vars bildrum är ett plan π (genom origo) som inte är π_2. För att A^k skall ha bildrummet π kan A inte ha full rang, dvs ett bildrum som är R^3, ty då skulle även A^k ha full rang. Men om A inte har full rang men har bildrummet π_2, kommer A^k ha ett bildrum som är en delmängd, faktiskt ett delrum, till π_2, vilket inte kan vara π, eftersom π och π_2 har samma dimension.

8. (5p) Låt $\mathcal{M}_{nm}$ beteckna vektorrummet som består av alla $n \times m$-matriser. Varje $n \times n$-matris $\mathbf{A}$ definerar en linjär avbildning $\Phi_{\mathbf{A}}$ av $\mathcal{M}_{nm}$ på sig själv genom att $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{\mathbf{nm}}$ avbildas på matrisen $\mathbf{AB} \in \mathcal{M}_{\mathbf{nm}}$, dvs $\Phi_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) = \mathbf{AB}$. Undersök om det finns något samband mellan matrisen $\mathbf{A}$:s rang och dimensionen hos kärnan till avbildningen $\Phi_{\mathbf{A}}$. Om ett sådant samband finns skall det anges.

Lösning. För att förenkla betraktar vi det ekvivalenta problemet $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{mn}$ avbildas på $\mathbf{BA}$. Vi låter matriserna representera linjära avbidningar A resp B.

Låt $\bar{e}_1$, ..., $\bar{e}_r$ vara en bas för A:s bildrum, som vi utvidgar med $\bar{e}_{r+1}$, ..., $\bar{e}_n$ till en bas för R^n. Låt $\bar{g}_1$, ..., $\bar{g}_m$ vara en bas för R^m.

Avbildningen B tillhör Φ_A:s kärna om och endast om BA avbildar varje vektor i R^n på nollvektorn i R^m. Nödvändigt och tillräckligt för detta är att

$$B(\bar{e}_1) = \bar{0}, \qquad B(\bar{e}_2) = \bar{0}, \qquad \ldots, \qquad B(\bar{e}_r) = \bar{0}.$$

För var och en av de övriga $n - r$ vektorerna kan bildvektorn $B(\bar{e}_i)$, $i = r + 1, ..., n$ väljas godtyckligt:

$$B(\bar{e}_i) = a_{1i}\bar{g}_1 + a_{2i}\bar{g}_2 + \cdots + a_{mi}\bar{g}_m,$$

där $a_{ji} \in R$. (Om det känns bekvämare skulle man kunna beskriva kärnan som bestående av matriserna

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m(r+1)} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vilka bildar ett ett delrum av dimension $m(n - r)$ till det mn-dimesionella vektorrummet $\mathcal{M}_{mn}$.) Alltså,

$$\dim(\ker(\Phi_A)) = m(n - \operatorname{rang}(A)).$$