

Matematiska Institutionen
KTH

Lappskrivning nummer 1A till kursen Linjär algebra för D och CL, SF1604, den 27 januari 2015, kl 10.15-10.45.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm en matris \mathbf{X} sådan att

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösning. Bestämmer först inversen till den kvadratiske matrisen ovan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -9 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation till vänster med inversen ger nu

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Låt \mathbf{A} beteckna en 3×3 -matris och låt \mathbf{z} beteckna en 3×1 -matris.

Låt $\mathbf{b} = (1 \ 1 \ 1)^T$ och låt $\mathbf{c} = (0 \ 1 \ 1)^T$.

Ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ har den unika lösningen $\mathbf{x} = (2 \ 0 \ 1)^T$ och ekvationssystemet $\mathbf{Ay} = \mathbf{c}$ har den unika lösningen $\mathbf{y} = (-1 \ -1 \ 1)^T$.

Räcker denna information för att bestämma lösningen till systemet

$$\mathbf{Az} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

OBS: Ett svar utan motivering ger inget poäng, men systemets lösning behöver inte anges.

Lösning. Man ser att

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{A} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{A} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

System har i varje fall en lösning (som är $\mathbf{z} = (1 \ -1 \ 2)^T$). Eftersom de givna ekvationssystemen har unika lösningar så har \mathbf{A} full rang. Därför har det system vi undersöker endast en lösning (som är $\mathbf{z} = (1 \ -1 \ 2)^T$).

SVAR: Ja informationen räckte för att bestämma systemets lösning.