Matematiska Institutionen
KTH

Lappskrivning nummer 1B till kursen Linjär algebra för D och CL, SF1604,
den 27 januari 2015, kl 10.15-10.45.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm en matris $\mathbf{X}$ sådan att

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösning. Bestämmer först inversen till den kvadratiska matrisen ovan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -8 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Multiplikation till vänster med inversen ger nu

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 6 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -1 \\ 8 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Låt $\mathbf{A}$ beteckna en 3×3-matris och låt $\mathbf{z}$ beteckna en 3×1-matris.

Låt $\mathbf{b} = (1\ \ 1\ \ 1)^T$ och låt $\mathbf{c} = (1\ \ 0\ \ 1)^T$.

Ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ har den unika lösningen $\mathbf{x} = (-1\ \ 0\ \ 2)^T$ och ekvationssystemet $\mathbf{Ay} = \mathbf{c}$ har den unika lösningen $\mathbf{y} = (1\ \ 2\ \ 1)^T$.

Räcker denna information för att bestämma lösningen till systemet

$$\mathbf{Az} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

OBS: Ett svar utan motivering ger inget poäng, men systemets lösning behöver inte anges.

Lösning. Man ser att

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{A}(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

System har i varje fall en lösning (som är $\mathbf{z} = (0 \ \ 2 \ \ 3)^T$). Eftersom de givna ekvationssystemen har unika lösningar så har $\mathbf{A}$ full rang. Därför har det system vi undersöker endast en lösning (som är $\mathbf{z} = (0 \ \ 2 \ \ 3)^T$).

SVAR: Ja informationen räckte för att bestämma systemets lösning.