Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 3A till kursen Linjär algebra för D, SF1604, den 12 februari 2013, kl 13.15-13.45.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Undersök om vektorn $(1, 0, 1, 2)$ i R^4 tillhör det linjära höljet $L = \text{span}\{(0, 1, 2, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 2, 1, 0)\}$.

Lösning. Ifrågavarande vektor tillhör det givna linjära höljet precis då det finns tal λ_1, λ_2 och λ_3 sådana att

$$\lambda_1(0, 1, 2, 1) + \lambda_2(1, 0, 1, 1) + \lambda_3(0, 2, 1, 0) = (1, 0, 1, 2)$$

vilket ger ett ekvationssystem som vi löser med Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|r} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Uppenbarliggen saknar systemet ovan lösningar så
SVAR: Nej, den givna vektorn tillhör ej det givna linjära höljet.

2. Betrakta det delrum L till R^5 som spänns upp av (genereras av) vektorerna $\bar{g}_1 = (0, 1, -1, 1, 1)$, $\bar{g}_2 = (2, 1, 0, -1, 1)$ och $\bar{g}_3 = (1, 0, 1, -1, 1)$, dvs

$$L = \text{span}\{(0, 1, -1, 1, 1), (2, 1, 0, -1, 1), (1, 0, 1, -1, 1)\}$$

Bestäm ett 2-dimensionellt delrum K till L som inte innehåller någon av vektorerna $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ resp $\bar{g}_3$.
Glöm ej att motivera ditt svar!

Lösning. Det finns många olika svar. Vi väljer att låta K genereras av de bägge vektorerna

$$\bar{u} = \bar{g}_1 + \bar{g}_2 = (2, 2, -1, 0, 2), \qquad \bar{v} = \bar{g}_1 + \bar{g}_3 = (1, 1, 0, 0, 2).$$

Vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är linjärt oberoende, de är ju inte parallella, och de tillhör L. Alltså gäller att $K = \text{span}\{\bar{u}, \bar{v}\}$ är ett 2-dimensionellt delrum till L. Om $\bar{g}_3$ skulle tillhöra K skulle

$$\bar{g}_3 = x\bar{u} + y\bar{v} = x(\bar{g}_1 + \bar{g}_2) + y(\bar{g}_1 + \bar{g}_3) \quad \Rightarrow \quad (x + y)\bar{g}_1 + x\bar{g}_2 + (y - 1)\bar{g}_3 = \bar{0},$$

vilket ju saknar lösning eftersom $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ och $\bar{g}_3$ är tre linjärt oberoende vektorer. På samma sätt visas att inte heller $\bar{g}_1$ och $\bar{g}_2$ tillhör K.
Ett av många möjliga svar är alltså
SVAR: T ex $K = \text{span}\{(2, 2, -1, 0, 2), (1, 1, 0, 0, 2)\}$