

Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 3A till kursen Linjär algebra för D, SF1604, den 11 februari 2014, kl 10.15-10.45.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm det värde på talet a för vilket de fyra vektorerna $(1, 1, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(-1, 1, -1, 1)$ och $(3, 2, 1, a)$ är linjärt beroende.

Lösning. Vi vet att fyra vektorer i R^4 är linjärt beroende om och endast om determinanten av en matris med de fyra vektorerna som kolonner (eller rader) är lika med noll. Vi finner att

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 2$$

SVAR: $a = 2$

2. Låt L beteckna nollrummet till matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestäm två olika delrum L_1 och L_2 till R^5 sådana att L är ett delrum till L_1 och L_1 är ett delrum till L_2 . Dessutom skall $L \neq L_1$ och $L_2 \neq R^5$.

Delrummen skall beskrivas på ett sådant sätt att man lätt, t ex genom att lösa ett ekvationssystem eller med en matrismultiplikation, kan avgöra om en given vektor tillhör delrummet L_1 resp L_2 .

För att få poäng på denna uppgift krävs en väl motiverad lösning!

Lösning. Låt \mathbf{B} och \mathbf{C} beteckna nedanstående matriser

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Låt $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_5)^T$ och låt $\mathbf{0}$ beteckna en kolonnmatrix bestående av enbart nollor. Då gäller att

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \text{och}, \quad \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

dvs, med andra ord, \mathbf{A} 's nollrum är ett delrum till \mathbf{B} 's nollrum och \mathbf{B} 's nollrum är ett delrum till \mathbf{C} 's nollrum. Dessa nollrum betecknar vi med L , L_1 respektive L_2 .

Vi vet att för $n \times m$ -matriser \mathbf{X} , med nollrummet $N(\mathbf{X})$, gäller sambandet $\dim(N(\mathbf{X})) + \text{rang}(\mathbf{X}) = m$. Matriserna \mathbf{B} och \mathbf{C} har rang två respektive ett och alltså får vi

$$\dim(L_1) = 5 - 2 = 3, \quad \text{och}, \quad \dim(L_2) = 5 - 1 = 4.$$

Om vi lyckas visa att $\text{rang}(\mathbf{A}) = 3$ följer att $\dim(L) = 2$ och uppgiften är löst, eftersom då måste $L \neq L_1$ och $L_1 \neq L_2 \neq R^5$.

Subtraherar vi rad 3 i matrisen \mathbf{A} tre gånger från rad 2 får vi en matris med samma rang

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 7 & 0 \\ 5 & -5 & -1 & -16 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

som ju har rangen tre, eftersom rad 1 och rad 2 inte är multiplar av varandra.