Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 3B till kursen Linjär algebra för D och CL, SF1604, den 10 februari 2015, kl 15.15-15.45.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Avgör om följande vektorer i vektorrummet R^4 är linjärt oberoende eller linjärt beroende:

$$\bar{e}_1 = (1,1,0,1), \quad \bar{e}_2 = (1,0,1,0), \quad \bar{e}_3 = (1,0,0,1), \quad \bar{e}_4 = (0,2,1,1).$$

Lösning. Vi beräknar determinanten av den matris vars kolonner utgörs av de givna vektorerna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Eftersom determinanten är skild ifrån noll så är vektorerna linjärt oberoende.

2. Det gäller alltid att snittet, eller skärningen, mellan två delrum L och K till ett vektorrum V också är ett delrum till V. (Detta behöver du inte visa.). Ett sådant snitt brukar betecknas $L \cap K$.

Låt nu L vara nollrummet till matrisen $\mathbf{A}$ nedan:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm ett 2-dimesionellt delrum K till R^4 sådant att dimension av snittet mellan L och K är ett, dvs

$$\dim(L \cap K) = 1.$$

(Obs motivering krävs. Bristfällig motivering kan ge avdrag med 0.5p – 1p)

Lösning. Vi låter K spännas upp av en vektor $\bar{u}$ i $\mathbf{A}$:s nollrum och en vektor $\bar{v}$ som inte tillhör $\mathbf{A}$:s nollrum, dvs $K = \text{span}\{\bar{u}, \bar{v}\}$. Vektorn $\bar{v} = (1,1,1,1)$

tillhör inte nollrummet. Löser vi systemet $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ ser vi att en av lösningarna, med $x_3 = 1$ och $x_4 = 0$ så har vi att t ex $\bar{u} = (1, -2, 1, 0)$ tillhör nollrummet. Vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är inte parallella och spänner då upp ett delrum K av dimension 2, som har en icketrivial skärning med L.

SVAR: T ex $K = \text{span}\{(1, 1, 1, 1), (1, -2, 1, 0)\}$.