Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 4A till kursen Linjär algebra för D och CL, SF1604, den 17 februari 2015, kl 10.15-10.45.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. (ON-system) Låt L vara det delrum till R^4 som genereras av vektorerna $(1, 2, -1, 2)$ och $(1, -1, 2, -1)$, dvs

$$L = \text{span}\{(1, 2, -1, 2), (1, -1, 2, -1)\}$$

Bestäm en ON-bas för detta delrum L.

Lösning. Vi använder Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod för att först hitta en ortogonalbas för L: Sätt $\bar{e}_1 = (1, 2, -1, 2)$ och

$$\bar{e}_2 = (1, -1, 2, -1) - \frac{(1, -1, 2, -1) \cdot (1, 2, -1, 2)}{(1, 2, -1, 2) \cdot (1, 2, -1, 2)}(1, 2, -1, 2) =$$

$$(1, -1, 2, -1) - \frac{-5}{10}(1, 2, -1, 2) = (1, -1, 2, -1) + \frac{1}{2}(1, 2, -1, 2) = \frac{1}{2}(3, 0, 3, 0).$$

Nu har vi ortogonalbasen

$$\bar{e}_1 = (1, 2, -1, 2), \qquad \bar{e}_2 = (3/2, 0, 3/2, 0).$$

Vi normerar vektorerna genom att dela med deras längder och finner

SVAR: En ON-bas för L är t ex

$$(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}), \qquad (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0).$$

2. (ON-system) Låt $\mathbf{A}$ beteckna matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm (kortaste) avståndet från punkten $(-3, 3, -2, 3)$ i R^4 till ortogonala komplementet till matrisens $\mathbf{A}$:s radrum.

(Obs motivering krävs. Bristfällig motivering kan ge avdrag med 0.5p – 1p)

Lösning. Ortogonala komplementet till matrisens radrum är matrisens nollrum, vilket vi bestämmer med hjälp av Gausselimination

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

till

$$\mathrm{N}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}\{(-2, 1, -1, 1)\}.$$

Vi projicerar nu vektorn $(-3, 3, -2, 3)$, dvs vektorn från origo till punkten i fråga, på detta nollrum:

$$\mathrm{Proj}_{\mathrm{N}(\mathbf{A})}(-3, 3, -2, 3) = \frac{(-3, 3, -2, 3) \cdot (-2, 1, -1, 1)}{(-2, 1, -1, 1) \cdot (-2, 1, -1, 1)}(-2, 1, -1, 1) =$$

$$= 2(-2, 1, -1, 1) = (-4, 2, -2, 2)$$

Det sökta avståndet ges nu av längden av vektorn

$$(-3, 3, -2, 3) - (-4, 2, -2, 2) = (1, 1, 0, 1),$$

eftersom denna vektor startar i en punkt i $\mathrm{N}(\mathbf{A})$, slutar i punkten ifråga, samt är vinkelrät mot $\mathrm{N}(\mathbf{A})$.

SVAR: $\sqrt{3}$.