Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 4B till kursen Linjär algebra för D, SF1604, den 20 februari 2013, kl 13.15-13.45.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm en minstakvadratlösning till systemet

$$\begin{cases} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 1 \\ x & - & 3y & = & 0 \end{cases}$$

Lösning. Med

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

så gäller att minstakvadratlösningen till systemet ges av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

SVAR: $x = 1/2$ och $y = 2/11$.

2. Låt L vara delrummet $L = \text{span}\{(1,1,1)\}$ till R^3. Någon inför i R^3 den inre produkten

$$((x_1, x_2, x_3)|(y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 4x_2y_2 + 3x_3y_3$$

Bestäm en bas för ortogonala komplementet $L^\perp$ till L i det inreproduktrum som denna inre produkt skapar.

Lösning. Ortogonala komplementet till L består av de tretipplar (x_1, x_2, x_3) sådana att

$$((x_1, x_2, x_3)|(1,1,1)) = 0 \qquad \text{dvs} \qquad x_1 \cdot 1 + x_1 \cdot 1 + x_3 \cdot 1 + 4x_2 \cdot 1 + 3x_3 \cdot 1 = 0.$$

Således utgör lösningarna till ekvationen $2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0$ det sökta ortogonala komplementet. En bas för lösningsrummet till denna ekvation är lätt att hitta, sätt $x_2 = t$ och $x_3 = s$ så blir $x_1 = -2t - 2s$ och lösningarna, med s och t godtyckliga reella tal

$$(x_1, x_2, x_3) = t(-2, 1, 0) + s(-2, 0, 1)$$

SVAR: En bas för $L^\perp$ är t ex $(-2, 1, 0)$ och $(-2, 0, 1)$ eftersom dessa två vektorer spänner upp $L^\perp$ och är linjärt oberoende.