

Matematiska Institutionen  
KTH

**Lösning till lappskrivning nummer 5A till kursen Linjär algebra för D och CL, SF1604, den 24 februari 2015, kl 10.15-10.45.**

Namn:

Resultat på lappskrivningar:

nr 1	nr 2	nr 3	nr 4	nr 5	summa

Bonuspoäng till tentan är summan ovan.

**OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.**

1. Låt  $B$  vara en linjär avbildning från  $R^3$  till  $R^3$  vara sådan att  $B(\bar{u}) = (1, 1, 1)$ ,  $B(\bar{v}) = (1, -1, 3)$  och  $B(\bar{w}) = (2, 2, 1)$ , för tre givna vektorer  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  och  $\bar{w}$  i  $R^3$ . Bestäm  $B(\bar{u} + 2\bar{v} - \bar{w})$ .

**Lösning.** Eftersom  $B$  är en linjär avbildning gäller

$$\begin{aligned} B(\bar{u} + 2\bar{v} - \bar{w}) &= B(\bar{u}) + 2B(\bar{v}) - B(\bar{w}) = \\ &= (1, 1, 1) + 2(1, -1, 3) - (2, 2, 1) = (1, -3, 6). \end{aligned}$$

**SVAR:**  $(1, -3, 6)$ .

2. Definiera en linjär avbildning  $A$  från  $R^3$  till  $R^3$  sådan att  $A(3, 2, 1) = (1, 2, 3)$  och  $A \circ A(\bar{x}) = \bar{x}$  för alla vektorer  $\bar{x}$  i  $R^3$ . (Det finns fler möjliga rätta svar, men det räcker att du bestämmer ett av dessa.)

(Obs motivering krävs. Bristfällig motivering kan ge avdrag med 0.5p – 1p)

**Lösning.** Vi låter

$$A(3, 2, 1) = (1, 2, 3), \quad A(1, 2, 3) = (3, 2, 1), \quad A(0, 0, 1) = (0, 0, 1).$$

Då gäller att

$$\begin{aligned} A \circ A(3, 2, 1) &= A(1, 2, 3) = (3, 2, 1), \\ A \circ A(1, 2, 3) &= A(3, 2, 1) = (1, 2, 3), \\ A \circ A(0, 0, 1) &= A(0, 0, 1) = (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Eftersom

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

är vektorerna  $(3, 2, 1)$ ,  $(1, 2, 3)$  och  $(0, 0, 1)$  en bas för  $R^3$ . Varje vektor  $\bar{u}$  i  $R^3$  kan då skrivas

$$\bar{u} = x_1(3, 2, 1) + x_2(1, 2, 3) + x_3(0, 0, 1)$$

för några tal  $x_1$ ,  $x_2$  och  $x_3$ . Vi får nu, pga linjariteten hos  $A \circ A$ , att

$$\begin{aligned} A \circ A\bar{u} &= x_1 A \circ A(3, 2, 1) + x_2 A \circ A(1, 2, 3) + x_3 A \circ A(0, 0, 1) = \\ &= x_1(3, 2, 1) + x_2(1, 2, 3) + x_3(0, 0, 1) = \bar{u}. \end{aligned}$$