Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 5B till kursen Linjär algebra för D, SF1604, den 26 februari 2013, kl 13.15-13.45.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. För den linjära avbildningen A från R^3 till R^3 gäller att

$$A(1,0,1) = (1,2,0), \qquad A(0,1,0) = (1,-1,2), \qquad A(0,1,1) = (0,1,2).$$

Bestäm $A(1,2,2)$.

Lösning: Vi använder att A är linjär och finner då att

$$A(1,2,2) = A\left((1,0,1) + (0,1,0) + (0,1,1)\right) = A(1,0,1) + A(0,1,0) + A(0,1,1) =$$

$$= (1,2,0) + (1,-1,2) + (0,1,2) = (2,2,4).$$

SVAR: $(2,2,4)$.

2. Antag att vektorrumet V har dimensionen $\dim(V) = 13$. Finns det någon linjär avbildning A från V till V sådan att bildrummets dimension är 9, dvs $\dim(\text{Im}(A)) = 9$ (eller $\dim(R(A)) = 9$ med lärobokens beteckning), och dessutom sådan att A^3 avbildar varje vektor i V på nollvektorn, dvs $A \circ A \circ A(\bar{x}) = \bar{0}$, för varje vektor $\bar{x}$ i V?

OBS Svaret skall motiveras, en resonerande text med väl valda och korrekta argument är OK.

Lösning: Vi vet att allmänt gäller att $\dim(\ker(A)) = \dim(V) - \dim(\text{Im}(A))$, så varje gång man applicerar avbildningen A så tappar man (högst) $13 - 9 = 4$ dimensioner. Efter tre appliceringar kan då högst 12 av de 13 dimensionerna försvinna. Så en sådan linjär avbildning A kan inte finnas.

Med mer precisa argument. Låt L vara ett delrum till V och låt $A(L)$ vara bilden av delrummet L under avbildningen A, dvs vektorerna $A(\bar{v})$ för $\bar{v}$ i L. De vektorer i L som därvid avbildas på nollvektorn är då de vektorer som både tillhör L och $\ker(A)$, dvs $L \cap \ker(A)$.

Linjära algebrans fundamentalsats ger nu att

$$\dim(A(L)) = \dim(L) - \dim(L \cap \ker(A)) \geq \dim(L) - \dim(\ker(A)) = \dim(L) - 4,$$

eftersom

$$\dim(L \cap \ker(A)) \leq \dim(\ker(A)).$$

Låt $A^i(V) = L_i$, så t ex $\text{Im}(A) = L_1$. Då gäller

$$\dim(L_1) = 9, \qquad \dim(L_2) \geq 9 - 4 \qquad \dim(L_3) \geq 5 - 4 = 1.$$

Alltså $A^3(V) = L_3 \neq \{\bar{0}\}$.