

Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 5B till kursen Linjär algebra för D och CL, SF1604, den 24 februari 2015, kl 10.15-10.45.

Namn:

Resultat på lappskrivningar:

nr 1	nr 2	nr 3	nr 4	nr 5	summa

Bonuspoäng till tentan är summan ovan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Låt B vara en linjär avbildning från R^3 till R^3 vara sådan att $B(\bar{u}) = (1, 1, 1)$, $B(\bar{v}) = (1, 2, -1)$ och $B(\bar{w}) = (-1, 1, 2)$, för tre givna vektorer \bar{u} , \bar{v} och \bar{w} i R^3 . Bestäm $B(\bar{u} + 2\bar{v} - \bar{w})$.

Lösning. Eftersom B är en linjär avbildning gäller

$$\begin{aligned} B(\bar{u} + 2\bar{v} - \bar{w}) &= B(\bar{u}) + 2B(\bar{v}) - B(\bar{w}) = \\ &= (1, 1, 1) + 2(1, 2, -1) - (-1, 1, 2) = (4, 4, -3). \end{aligned}$$

SVAR: $(4, 4, -3)$.

2. Definiera en linjär avbildning A från R^3 till R^3 sådan att $A(1, 2, 3) = (3, 2, 1)$ och $A \circ A(\bar{x}) = \bar{x}$ för alla vektorer \bar{x} i R^3 . (Det finns fler möjliga rätta svar, men det räcker att du bestämmer ett av dessa.)

(Obs motivering krävs. Bristfällig motivering kan ge avdrag med 0.5p – 1p)

Lösning. Vi låter

$$A(3, 2, 1) = (1, 2, 3), \quad A(1, 2, 3) = (3, 2, 1), \quad A(0, 0, 1) = (0, 0, 1).$$

Då gäller att

$$\begin{aligned} A \circ A(3, 2, 1) &= A(1, 2, 3) = (3, 2, 1), \\ A \circ A(1, 2, 3) &= A(3, 2, 1) = (1, 2, 3), \\ A \circ A(0, 0, 1) &= A(0, 0, 1) = (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Eftersom

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

är vektorerna $(3, 2, 1)$, $(1, 2, 3)$ och $(0, 0, 1)$ en bas för R^3 . Varje vektor \bar{u} i R^3 kan då skrivas

$$\bar{u} = x_1(3, 2, 1) + x_2(1, 2, 3) + x_3(0, 0, 1)$$

för några tal x_1 , x_2 och x_3 . Vi får nu, pga linjariteten hos $A \circ A$, att

$$\begin{aligned} A \circ A\bar{u} &= x_1 A \circ A(3, 2, 1) + x_2 A \circ A(1, 2, 3) + x_3 A \circ A(0, 0, 1) = \\ &= x_1(3, 2, 1) + x_2(1, 2, 3) + x_3(0, 0, 1) = \bar{u}. \end{aligned}$$