Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar på linjära ekvationssystem och matriskalkyl inför lappskrivning nummer 1 , SF1604.

1. Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 4 \\ x + 2y + 5z = 0 \\ x + 3y + z = 6 \end{cases}$$

LÖSNING:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -10 & 10 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \end{array}\right).$$

Vi läser ut ur tablån ovan att $z = -1$, $y = 2$ och $x = 1$.

2. Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 8 \\ -x + 5y + z = 10 \\ x - 18y + z = -38 \end{cases}$$

LÖSNING: Andra ekvationen adderad en gång till den tredje ekvationen och två gånger till den första ekvationen ger systemet

$$\begin{cases} 13y - 2z = 28 \\ -x + 5y + z = 10 \\ -13y + 2z = -28 \end{cases}$$

Adderar nu vi den sista ekvationen till den första får vi systemet

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -x + 5y + z = 10 \\ -13y + 2z = -28 \end{cases}.$$

Låter vi nu y vara ett godtyckligt tal $y = t$ så får vi för varje val av ett sådant tal t precis en lösning

$$z = \tfrac{1}{2}(-28 + 13t) = -14 + \tfrac{13}{2}t$$
$$x = -10 + 5y + z = -10 + 5t - 14 + \tfrac{13}{2}t = -24 + \tfrac{23}{2}t.$$

3. Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ beteckna nedanstående matriser

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestäm en invers till matrisen $\mathbf{A}$ och använd denna invers för att bestämma en matris $\mathbf{X}$ sådan att $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

LÖSNING: Beräknar först inversen till matrisen A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Matrisen till höger ovan är inversen men för säkerhets skull gör vi en kontroll

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

precis som det skall vara. Multiplicerar vi nu den givna matrisekvationen med $\mathbf{A}^{-1}$ till vänster på bägge sidor om likhetstecknet får vi

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \text{dvs} \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Vi finner alltså

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Låt matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara som ovan. Beräkna

$$(\mathbf{AA})^{-1}, \quad (\mathbf{A}+\mathbf{A})^{-1}, \quad (\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{A}^{-1})^T, \quad (\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^T \quad \text{och} \quad (\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}.$$

LÖSNING:

a)

$$(\mathbf{AA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $(\mathbf{A}+\mathbf{A})^{-1} = (2\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}$, ty

$$\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1} \cdot 2A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}\,.$$

c)

$$(\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{A}^{-1})^T = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

.

d)

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^T = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix})^T = (\begin{pmatrix} 5 & -26 \\ -19 & 45 \end{pmatrix})^T = \begin{pmatrix} 5 & -19 \\ -26 & 45 \end{pmatrix}$$

e)

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix})^{-1} = (\begin{pmatrix} 5 & -26 \\ -19 & 45 \end{pmatrix})^{-1} =$$
$$\frac{1}{5 \cdot 45 + (-26)\cdot(-19)} \begin{pmatrix} 45 & 26 \\ 19 & 5 \end{pmatrix}$$

---

5. För vilka värden på talen a och b saknar systemet

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z + u = 8 \\ -x + 5y + z + 2u = 10 \\ x - 18y + z + au = b \end{cases}$$

lösning.

LÖSNING: Andra ekvationen adderad en gång till den tredje ekvationen och två gånger till den första ekvationen ger systemet

$$\begin{cases} 13y - 2z + 5u = 28 \\ -x + 5y + z + 2u = 10 \\ -13y + 2z + (a+2)u = b+10 \end{cases}$$

Adderar nu vi den sista ekvationen till den första får vi systemet

$$\begin{cases} (a+7)u = b+38 \\ -x + 5y + z + 2u = 10 \\ -13y + 2z + (a+2)u = b+10 \end{cases}.$$

Om $a = -7$ och $b \neq -38$ så saknar systemet uppenbarligen lösning.

6. Bestäm samtliga värden på det reella talet a för vilka det homogena systemet nedan har icketriviala lösningar.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ay + a^2z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \end{cases}$$

LÖSNING:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1-(a-1)^2 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

När $a \neq 1$ finns det bara den triviala lösningen. I övriga fall finns det icketriviala lösningar.

7. Du får reda på att ett linjärt ekvationssystem i de obekanta x, y och z bl a har de bägge lösningarna $(x, y, z) = (1, 2, 1)$ och $(x, y, z) = (2, 1, 3)$. Vilken information ger detta om samtliga lösningar till systemet.

LÖSNING: Låt $\mathbf{x}_p$ vara en fix lösning till systemet

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Då kan varje annan lösning skrivas $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ för någon lösning $\mathbf{x}_h$ till motsvarande homogena system. För varje vald lösning $\mathbf{x}_h$ till motsvarande homogena system får vi också en lösning.

Låt $\mathbf{c} = (1\ \ 2\ \ 1)^T$ och $\mathbf{d} = (2\ \ 1\ \ 3)^T$. Då gäller

$$\mathbf{Ac} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{Ad} = \mathbf{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{A}(\mathbf{c} - \mathbf{d}) = \mathbf{0}.$$

dvs $\mathbf{f} = \mathbf{c} - \mathbf{d} = (-1\ \ 2\ \ -2)^T$ är en lösning till motsvarande homogena system

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0},$$

dvs

$$\mathbf{Af} = \mathbf{0},$$

Vidare får vi att för varje reellt tal t så gäller

$$\mathbf{A}t\mathbf{f} = t\mathbf{Af} = t\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

dvs alla vektorer $t\mathbf{f}$ är också lösningar till det homogena systemet.

Alltså gäller att lösningsmängden innehåller vektorerna

(x,y,z)=(1,2,1)+t(-1,2,-2).

8. Finns det någon matris $\mathbf{X}$ sådan att

$$\mathbf{X}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

LÖSNING: Definitionen av matrismultiplikation ger att då skulle

$$\mathbf{X}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

För att lösa denna ekvation beräknar vi inversen av matrisen till vänster om likhetstecknet:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplikation med den sökta inversen ger

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket skulle vara den enda möjliga matris $\mathbf{X}$ att lösa problemet. Dock får vi

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

SVAR: Ingen matris $\mathbf{X}$ löser problemet.

9. Bestäm talet a så att systemet nedan har minst en lösning

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = a \\ x - 5y + 8z = 1 \end{cases}$$

LÖSNING:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & a \\ 1 & -5 & 8 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & a-3 \\ 0 & -7 & 11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-a \end{array}\right)$$

Systemet är lösbart precis då $a = 3$. Då har systemet oändligt många lösningar.

10. Om **A** är symmetrisk och **B** inte är symmetrisk är det då sant eller falskt att **AB** aldrig kan vara symmetrisk.

LÖSNING: Låt **A** vara nollmatrisen. Då är **AB** symmetrisk för alla matriser **B**. Låt **A** vara identitetsmatrisen. Då är **AB** inte symmetrisk för någon matris **B** som inte är symmetrisk.

OBS 1. Andra uppgiften på lappskrivningen kan eventuellt bli svårare än de fyra ovan.
OBS 2. Lösningar anslås på kurshemsidan senast helgen innan lappskrivningen.