

Matematiska Institutionen, KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, för CDATE, CTFYS och vissa CL, torsdagen den 15 januari 2015 kl 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Bonuspoäng förvärvade under ht 2014 får användas. (De sam avsåg att ”plussa” under vt 14 men för vilka det inte kunde beredas plats får använda sina bonuspoäng från läsåret 2013-2014.)

Den som har b bonuspoäng får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b - 5$ och 0.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ beteckna matriserna nedan:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) (2p) Bestäm samtliga matriser $\mathbf{X}$ sådana att $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.
 (b) (1p) Bestäm matrisen $\mathbf{B}$'s rang.
 (c) (2p) Om $\mathbf{Y}$ satisfierar ekvationen $\mathbf{A}^8 \mathbf{Y} = \mathbf{B}$, vilken rang har då matrisen $\mathbf{Y}$. (Motivera ditt svar noggrant!).
2. (a) (3p) Låt talföljden $a_0, a_1, \dots$ definieras av att $a_0 = 3, a_1 = 0$ och $a_2 = 14$ och

$$a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}, \quad \text{för } n = 3, 4, \dots,$$

Ge ett induktionsbevis för att $a_n = 3^n + (-2)^n + (-1)^n, n = 0, 1, 2, \dots$

- (b) (2p) Det komplexa talet $3 - 2i$ är en av rötterna till ekvationen

$$z^3 + az^2 + bz + 1 = 0,$$

där a och b är reella tal. Bestäm ekvationens övriga rötter.

3. (5p) Det finns tal a och b som gör kolonnmatrisen $(1 \ 2 \ -2)^T$ till en egenvektor till matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & b & 4 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisens samtliga egenvärden och egenvektorer

DEL II

4. (5p) (ON-system) Linjen ℓ_1 innehåller punkterna $(1, 0, -1)$ och $(2, -1, -3)$, linjen ℓ_2 innehåller punkterna $(8, -4, 6)$ och $(5, -2, 5)$ och planet π innehåller punkterna $(5, -1, 0)$, $(4, 0, 5)$ och $(0, -4, 1)$. Linjerna ℓ_1 och ℓ_2 skär varandra i en punkt P . Genom P dras en linje ℓ vinkelrätt mot planet π . Bestäm ℓ 's skärningspunkt med xy -planet.
5. (5p) Betrakta $\mathbb{R}^4$ med standardskalärprodukt, samt de 1-dimensionella delrummen L_1 och L_2 som spänns upp av $(1, 0, -1, 2)$ respektive $(0, 1, 2, 3)$. Bestäm en ON-bas för snittet (skärningen) $L = L_1^\perp \cap L_2^\perp$ mellan de ortogonala komplementen till L_1 och L_2 samt utvidga denna bas för L till en ON-bas för hela $\mathbb{R}^4$.
6. (5p) För vilka reella tal a finns det en linjär avbildning A från $\mathbb{R}^4$ till $\mathbb{R}^4$ sådan att

$$\text{Im}(A) = \text{span}\{(1, 2, -1, 1), (2, 0, 1, 3), (0, 2, 3, 1)\},$$

och

$$\text{Im}(A \circ A) = \text{span}\{(1, 2, -1, 1), (2, 0, 1, 3), (3, -2, 3, a)\}.$$

(OBS Motivera noggrant, avsaknad av korrekt argumentering resulterar i poängavdrag.)

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigtvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. Låt $\mathcal{M}_{3 \times 3}$ vara vektorrummet av 3×3 matriser med reella koefficienter. Givet matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

låt W vara mängden av 3×3 -matriser som kommuterar med A , dvs,

$$W = \{B \in \mathcal{M}_{3 \times 3} : AB = BA\}.$$

- (a) (1p) Visa att W är ett delrum till $\mathcal{M}_{3 \times 3}$.
- (b) (1p) Visa att $\dim(W) \geq 2$.
- (c) (3p) Bestäm $\dim(W)$.
8. (5p) Definiera en inre produkt på vektorrummet $\mathbb{P}_n$, som består av polynom av grad högst n , genom att låta

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

Givet en ON-bas $B = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ för $\mathbb{P}_n$ (med avseende på ovanstående inre produkt), betrakta uttrycket

$$G(B) = \sum_{i=1}^N |f_i(0)|^2.$$

Visa att $G(B)$ ej beror på valet av ON-basen B .