<u>Ex</u> Bestäm lösn.mängden till systemet

$$\begin{cases} x+(a^2+1)y+az=1 \\ x+2y+az=1 \\ 2x+4y+(1+3a)z=0 \end{cases}$$

för varje värde på konstanten a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & (a^2+1) & a & 1 \\ 1 & 2 & a & 1 \\ 2 & 4 & (1+3a) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & (a^2+1) & a & 1 \\ 2 & 4 & (1+3a) & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 & -2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & a^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+a) & -2 \end{array}\right).$$

<u>Fall 1</u> $a \neq \pm 1$. Mult. rad 2 med $\frac{1}{a^2-1}$, rad 3 med $\frac{1}{1+a}$.

Ger $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{1+a} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2 \\ -a \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1+\frac{2a}{1+a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{1+a} \end{array}\right)$

<u>Fall 2</u> $a=1$

$$\begin{matrix} \\ \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -1 \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Reducerad trappform. Kolonn 1 och 3 pivotkolonner. y fri variabel

Fall 3 $\quad a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \leftarrow \text{ ingen lösning}$$

Svar
$$\begin{cases} a \neq \pm 1: & x = \dfrac{1+3a}{1+a},\ y = 0,\ z = -\dfrac{2}{1+a} \\ a = 1: & x = 2-2t,\ y = t,\ z = -1 \\ a = -1: & \text{ingen lösning} \end{cases}$$

Ex Lös systemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 8x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 11x_3 + 9x_4 = 18 \\ x_1 + 4x_2 \qquad - 19x_4 = -16 \end{cases} \quad \dots (*)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -8 & -2 \\ 3 & 1 & 11 & 9 & 18 \\ 1 & 4 & 0 & -19 & -16 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 & -3 & -1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & 12 & 12 \\ 0 & 3 & -3 & -18 & -18 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 & 2 & -3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_3, x_4 fria variabler

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 4x_3 + 5x_4 = 8 \\ \qquad x_2 - x_3 - 6x_4 = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -4s - 5t + 8 \\ x_2 = s + 6t - 6 \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

$$\underset{\uparrow \atop \bar{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}} = s \cdot \underset{\uparrow \atop \bar{u}}{\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + t \cdot \underset{\uparrow \atop \bar{v}}{\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} + \underset{\uparrow \atop \bar{p}}{\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\bar{x} = \underbrace{s\bar{u} + t\bar{v}}_{\text{Span}(\bar{u},\bar{v})} + \underbrace{\bar{p}}_{\text{en "partikulärlösning}}$$

Span$(\bar{u}, \bar{v})$
= alla linjär komb.
av $\bar{u}$ och $\bar{v}$

Om vi i st. tar alla högerled = 0 i (*) blir systemet homogent, och lösningsmängden blir Span$(\bar{u}, \bar{v})$.

Ex Lös komplexa systemet $\begin{cases} ix+(1+i)y+z=0 \\ 5x-2iy-4iz=0 \\ 3ix+8y+(3-i)z=0 \end{cases}$

Högerledskolonn utelämnad ↓

$$-i \quad \begin{bmatrix} i & 1+i & 1 \\ 5 & -2i & -4i \\ 3i & 8 & 3-i \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1-i & -i \\ 5 & -2i & -4i \\ 3i & 8 & 3-i \end{bmatrix} \; -5 \;\; -3i \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1-i & -i \\ 0 & -5+3i & i \\ 0 & 5-3i & -i \end{bmatrix} \; 1 \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4+2i & 0 \\ 0 & -5+3i & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; -i \quad \Leftrightarrow$$

↖ "genväg"

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4+2i & 0 \\ 0 & 3+5i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ← ej regelrätt trappform

Sätt $y=t$ (godtyckl. komplext tal):

$$\begin{cases} x=(4-2i)t \\ y=t \\ z=-(3+5i)t \end{cases}$$

eller $(x,y,z)=t\big(4-2i,\ 1,\ -(3+5i)\big)$

Några begrepp.

\# står för "antalet"

<u>Kvadratiskt system</u> : #obekanta = #ekvationer

<u>Liggande system</u> : —"— > —"—

<u>Stående system</u> : —"— < —"—

<u>Corollarium 2</u> Varje liggande homogent system har icke-triviala lösningar (∞ många)

(Tänk efter!)

Begrepp "Allmänt högerled": <u>variabler</u> i HL,

t. ex.
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = y_1 \\ 2x_1 - 3x_2 = y_2 \end{cases}$$

Lösning: x_1 och x_2 uttryckta i y_1 och y_2

<u>Corollarium 3</u>

(i) Stående system med allmänt högerled saknar lösning

(ii) System som har entydig lösning för allmänt högerled är kvadratiska

(iii) Om ett kvadratiskt system har precis en lösning för något högerled, så har det precis en lösning för allmänt högerled.

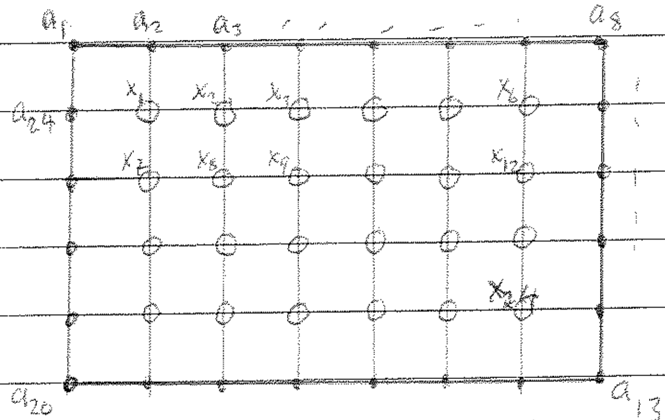
(Tänk efter!)

Obs Om ett visst homogent system $A\bar{x} = \bar{0}$ har entydig lösning*), så har $A\bar{x} = \bar{b}$ entydig lösning för varje högerled $\bar{b}$.

Ty: Om $A\bar{x} = \bar{0}$ har entydig lösning, så måste alla kolonner i koefficientmatrisen A bli pivot-kolonner.

*) dvs endast triviala lösningen

Ex Rutnät enl. figur.



Påstående: För varje val av värden i de yttre punkterna, $a_1, a_2, \ldots, a_{24}$, finns precis en uppsättning värden $x_1, \ldots, x_{24}$ i de inre punkterna sådana att värdet i varje inre punkt är medelvärdet av värdena i de fyra närmaste grannpunkterna,

dvs

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2 + x_7 + a_2 + a_{24}}{4} \\ x_2 = \dfrac{x_1 + x_3 + x_8 + a_3}{4} \\ \vdots \\ x_9 = \dfrac{x_3 + x_8 + x_{10} + x_{15}}{4} \\ \vdots \\ x_{24} = \dfrac{x_{18} + x_{23} + a_{12} + a_{14}}{4} \end{cases}$$

eller
$$\begin{cases} x_1 - \frac{x_2}{4} - \frac{x_7}{4} = \frac{a_2 + a_{24}}{4} \\ -\frac{x_1}{4} + x_2 - \frac{x_3}{4} - \frac{x_8}{4} = \frac{a_3}{4} \\ \vdots \\ -\frac{x_3}{4} - \frac{x_8}{4} + x_9 - \frac{x_{10}}{4} - \frac{x_{15}}{4} = 0 \\ \vdots \\ -\frac{x_{18}}{4} - \frac{x_{23}}{4} + x_{24} = \frac{a_{12} + a_{14}}{4} \end{cases}$$

Ett kvadratiskt system med 24 ekv. och 24 obekanta.

Ska visa entydig lösning för varje val av $a_1, \dots, a_{24}$.

Enl. Obs räcker det att visa detta för motsv. homogena system, dvs visa att detta endast har den triviala lösningen. Sätt alla $a_i = 0$ och låt α vara det största värde som förekommer i en given lösning. Anta $\alpha > 0$, och säg att $x_i = \alpha$. Endast möjligt om alla 4 grannarna har värdet α (följer av medelvärdesegenskapen; varför?). Induktivt fås en motsägelse, varför $\alpha \leq 0$. På samma sätt följer att det minsta värdet β är ≥ 0. Dvs alla värden måste vara $= 0$, och saken är klar.