Matematiska Institutionen
KTH

Kontrollskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, den 10 november 2014 kl 15:30-17:00.

Jourhavande lärare: Pär Kurlberg

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Uppgifter

1. (3p) Definiera en linjär avbildning $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ genom

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(1) \\ p(1) \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas för $\ker(T)$, och beskriv $\mathrm{range}(T)$.

T är linjär, och vi ser att $\mathrm{range}(T) \subset \mathrm{Span}((1,1)^t)$. Eftersom $T(1) = (1,1)^t$ gäller likhet.

Vi har sett att $\mathrm{range}(T)$ har dimension ett, således har $\ker(T)$ dimension två. Eftersom $T(t-1) = T((t-1)^2) = 0$ och $t-1, (t-1)^2$ är oberoende (polynom av olika gradtal är oberoende) är $\{t-1, (t-1)^2\}$ en bas.

---

2. (3p) De första fyra Laguerre-polynomen ges av $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = 1 - t$, $p_2(t) = 2 - 4t + t^2$, samt $p_3(t) = -18t + 9t^2 - t^3$. Givet att $B = (p_0(t), p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ är en bas för $\mathbb{P}_3$, bestäm koordinatvektorn för $p(t) = 7 - 8t + 3t^2$ relativt basen B.

Vi vill uttrycka $p(t)$ som en linjärkombination av $p_0, \ldots, p_3$, men eftersom p har grad två ser vi att $p \in \mathrm{Span}(p_0, p_1, p_2)$. För att hitta koefficienter inför vi standardbasen $\{1, t, t^2\}$ på $\mathbb{P}_2$, och får följande (augmenterade) matris:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

som, efter radoperationer, har lösningen $x = (5 \ -4 \ 3)^t$.

Således är $[p]_B = (5 \ -4 \ 3 \ 0)^t$.

---

3. (3p) Visa att om $|z| < 1$ och $|w| < 1$ följer att

$$\left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right| < 1.$$

Gammal inlämningsuppgift!
