KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	kodnr

**Lösning till kontrollskrivning 1A, 14 april 2015, 15.15–16.15,
i SF1610 Diskret matematik för CINTE, CMETE mfl.**

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	falskt
a)	För heltal $n \geq 2$ gäller att $n^2 - 1$ är ett primtal om och endast om $n = 2$.	x	
b)	För varje naturligt tal n är elementet $n - 1$ (multiplikativt) inverterbart i ringen $\mathbb{Z}_n$.	x	
c)	Om $n \equiv 1 (\text{mod } 12)$ så är $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$.	x	
d)	Om $\text{sgd}(a, b) = 1$ så är $\text{sgd}(a, a + b) = 1$	x	
e)	För varje mängd A gäller att mängden $A \setminus \emptyset$ är lika stor som mängden A.	x	
f)	En ekvivalensrelation $\mathcal{R}$ på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kan ha fem element, dvs $\lvert\mathcal{R}\rvert = 5$.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Skriv talet 87 på binär form.

SVAR: $(1010111)_2$.

b) (1p) Skriv upp alla (multiplikativt) inverterbara element i ringen $\mathbb{Z}_{20}$.

SVAR: $1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19$

c) (1p) Bestäm $17^{512} (\text{mod } 16)$.

SVAR: 1.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Lös ekvationssystemet nedan i ringen $\mathbb{Z}_{25}$:

$$\begin{cases} x & + & 4y & = & 10 \\ 2x & + & 21y & = & 5 \end{cases}$$

OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.

Lösning: Eliminationsmetoden ger

$$\begin{cases} x & + & 4y & = & 10 \\ 2x & + & 21y & = & 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x & + & 4y & = & 10 \\ 2x & + & 0y & = & 15 \end{cases}$$

Eftersom 3 är inverterbart i ringen i $\mathbb{Z}_{25}$ så har ekvationen $3x = 15$ den enda lösningen $x = 5$. Insättning i systemets första ekvation ger nu att $4y = 10-5 = 5$. Eftersom $4^{-1} = -6$ så får vi

$$(-6)4y = (-6)5 = -5 = 20.$$

SVAR. $x = 5$ och $y = 20$.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Bestäm den största gemensamma delaren till de tre talen 242, 308 och 666.

OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.

Solution. Söker först största gemensamma delaren till 242 och 308. Euklides algoritm ger

$$308 = 242 + 66, \qquad 242 = 4 \cdot 66 + 22, \qquad 66 = 3 \cdot 22$$

så $\mathrm{sgd}(242, 308) = 22$. Söker nu $\mathrm{sgd}(22, 666)$.

$$666 = 30 \cdot 22 + 6, \qquad 22 = 4 \cdot 6 - 2, \qquad 6 = 3 \cdot 2.$$

SVAR: 2.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) En talföljd $a_0, a_1, ...$ definieras rekursivt genom att $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ och

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2},$$

för $n = 2, 3 \ldots$. Ge ett induktionsbevis för att $a_n = 2^n + 3^n$.

OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.

Lösning. Sätt $b_n = 2^n + 3^n$. Vi visar att $a_n = b_n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vi finner först att

$$b_0 = 1 + 1 = 2 = a_0, \qquad b_1 = 2 + 3 = 5 = a_1.$$

Antag nu att $a_n = b_n$ för talen $n = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Vi visar att då är även $a_m = b_m$. Vi finner att

$$a_m = 5a_{m-1} - 6a_{m-2} = 5b_{m-1} - 6b_{m-2} = 5(2^{m-1} + 3^{m-1}) - 6(2^{m-2} + 3^{m-2}) =$$
$$= 5 \cdot 2^{m-1} - 6 \cdot 2^{m-2} + 5 \cdot 3^{m-1} - 6 \cdot 3^{m-2} = 10 \cdot 2^{m-2} - 6 \cdot 2^{m-2} + 15 \cdot 3^{m-2} - 6 \cdot 3^{m-2}$$
$$4 \cdot 2^{m-2} + 9 \cdot 3^{m-2} = 2^m + 3^m = b_m.$$

Enligt induktionsprincipen gäller nu att $a_n = b_n = 2^n + 3^n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.