KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	kodnr

Lösning till kontrollskrivning 2A, 29 april 2015, 15.15–16.15, i SF1610 Diskret matematik för CINTE, CMETE mfl.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

	sant	**falskt**
a) Antalet sätt att ställa 12 personer i en kö är mer än 1000 gånger större än antalet sätt att ställa 9 personer i kö.	x	
b) För Stirlingtal gäller att $\mathrm{S}(m,k) < \mathrm{S}(n,k)$ för alla heltal k, n och m sådana att $1 \leq k < m < n$.	x	
c) Antalet delmängder med två element till en mängd med minst 100 element är alltid ett jämnt tal.		x
d) För alla mängder A, B och C där $\lvert C\rvert = 1$ gäller att $\lvert A \cup B \cup C\rvert \geq \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A \cap B\rvert$.	x	
e) För alla heltal n och k med $1 \leq k < n$ gäller $\binom{n}{k} < \binom{n+1}{k+1}$	x	
f) Till varje positivt heltal m finns heltal n och k så att $m = \binom{n}{k}$.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Ange Stirlingtalet $S(5,2)$.

SVAR: 15.

b) (1p) Ange ett uttryck för koefficienten framför x^3y^7 i polynomet $(x-y)^{10}$.

SVAR:

$$-\binom{10}{3}$$

c) (1p) Ange med ett heltal antalet sätt fördela nio identiska bollar i tre olika lådor.

SVAR: 55.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Bestäm antalet sätt att utse en grupp om fyra pojkar bland 12 pojkar om pojken A inte kan var med i gruppen om pojken B är med i gruppen.
OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges och svaret skall ges i formen av ett heltal.

Lösning. Totala antalet sätt att bilda en grupp med fyra pojkar är

$$\binom{12}{4}.$$

Antalet grupper med både pojken A och B är då

$$\binom{10}{2}.$$

Den senare grupperna är förbjudna så
SVAR:.

$$\binom{12}{4} - \binom{10}{2} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 495 - 45 = 450.$$

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) De sex barnen A, B, C, D, E och F skall delas in i den röda, blå och gula gruppen. På hur många sätt kan detta ske om ingen grupp får vara tom.

OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges och svaret skall ges i formen av ett heltal.

Lösning. Problemet är ekvivalent med att bestämma antalet surjektioner från mängden {A,B,C,D,E,F} till mängden {röd, gul blå}. Vi vet att detta antal är lika med $3! \cdot \mathrm{S}(6,3)$.

Vi beräknar Stirlingtalet ovan med hjälp av rekursionen

$$\mathrm{S}(n,k) = \mathrm{S}(n-1,k-1) + k\mathrm{S}(n-1,k)$$

$$\mathrm{S}(6,3) = \mathrm{S}(5,2) + 3\mathrm{S}(5,3), \quad \mathrm{S}(5,3) = \mathrm{S}(4,2) + 3\mathrm{S}(4,3),$$

$$\mathrm{S}(4,3) = \mathrm{S}(3,2) + 3\mathrm{S}(3,3) = 3 + 3 = 6,$$

Så

$$\mathrm{S}(5,3) = 7 + 3 \cdot 6 = 25, \quad \mathrm{S}(6,3) = 15 + 3 \cdot 25 = 90.$$

Alltså

SVAR. $3! \cdot 90 = 540$.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Ur en skolklass med 12 flickor och 12 pojkar skall bildas tre grupper, var och en med tre barn. Hur många möjligheter finns för detta om en av grupperna skall bestå av enbart pojkar, en av grupperna av enbart flickor samt en av grupperna skall ha minst en flicka och minst en pojke.

OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges, men svaret får innehålla utryck definierade i kursen.

Lösning. Väljer först den rena pojkgruppen vilket går på $\binom{12}{3}$ olika sätt. Den rena flickgruppen kan väljas på lika många sätt. För den mixade gruppen finns två möjligheter, antingen två flickor och en pojke eller vice versa. Antalet möjligheter att välja den mixade gruppen är då

$$\binom{12-3}{2}\binom{12-3}{1}+\binom{12-3}{1}\binom{12-3}{2}=2\binom{9}{2}\binom{9}{1}.$$

Multiplikationsprincien ger nu

SVAR.

$$\binom{12}{3}^2 2\binom{9}{2}\binom{9}{1}$$