

**KTH Matematik**  
Olof Heden

$\Sigma$ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	kodnr

**Lösning till kontrollskrivning 5A, 21 maj 2015, 13.15–14.15,  
i SF1610 Diskret matematik för CINTE, CMETE mfl.**

Inga hjälpmedel tillåtna.

Minst 8 poäng ger godkänt.

Godkänd ks  $n$  medför godkänd uppgift  $n$  vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år),  $n = 1, \dots, 5$ .

13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.

**Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.**

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

**Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!**

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar  $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar  $-\frac{1}{2}$ p.)

Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

**Kryssa för** om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå!)

	sant	falskt
a) Den kompletta grafen $K_{2n}$ har en Eulerkrets för varje jämnt heltal $n \geq 4$ .		x
b) Om en graf har lika många kanter som noder så har grafen minst en cykel.	x	
c) Den kompletta bipartita grafen $K_{n,m}$ har en Hamiltoncykel om och endast om $n = m \geq 2$ .	x	
d) Den bipartita grafen $K_{2,n}$ är planär för alla positiva heltal $n$ .	x	
e) Varje sammanhängande graf med fler kanter än noder har minst två spännande träd.	x	
f) När en sammanhängande planär graf med minst tre noder ritas så att inga kanter skär varandra, blir antalet områden som uppstår alltid färre än antalet kanter i grafen.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

**2a)** (1p) Grafen  $G$  har 7 noder med valenserna 3, 3, 3, 4, 4, 5 och 6. Ange antalet kanter i grafen.

**SVAR:** 14

**b)** (1p) Rita en graf  $G$  med 10 noder varav en av noderna har valens (grad) 4 och samtliga övriga noder har valens (grad) 2, och som saknar Hamiltoncykel.

**SVAR:** Vi ritar en åtta.

**c)** (1p) Ge ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att det skall finnas en komplett matchning i en bipartit graf.

**SVAR:** Låt, för en delmängd  $A$  till nodmängden  $X$ ,

$$J(A) = \{y \in Y \mid y \text{ granne med nod i } A\}.$$

Nödvändigt och tillräckligt villkor för att det skall finnas en komplett matchning i en bipartit graf är att

$$|J(A)| \geq |A|$$

för alla delmängder  $A$  till  $X$ .

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Grafen  $G$  består av träd. Grafen har 73 noder och 52 kanter. Bestäm antalet träd i  $G$ .

**OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.**

**Lösning.** Antag antalet träd är  $t$ , och att grafen består av träden  $T_i$ , för  $i = 1, 2, \dots, t$ , med respektive  $v_i$  stycken noder och  $e_i$  stycken kanter. Vi får då

$$v_1 + v_2 + \dots + v_t = 73,$$

$$e_1 + e_2 + \dots + e_t = 52.$$

Då  $v_i = e_i + 1$ , erhåler vi efter en substitution

$$(e_1 + 1) + (e_2 + 1) + \dots + (e_t + 1) = 73,$$

dvs

$$e_1 + e_2 + \dots + e_t + t = 73.$$

Vi får då att

**SVAR:** Antalet träd är  $t = 21$ .

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Grafen  $G$  saknar parallella kanter, dvs mellan varje par av noder går högst en kant, och saknar loopar, dvs kanter som ändrar i en och samma nod. Antalet noder i grafen är 7 och varje nod har en valens (grad) som är minst 5. Visa att  $G$  inte kan vara planär.

**OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.**

**Lösning.** Antalet kanter  $e$  är då minst

$$e \geq \frac{1}{2}(5 + \dots + 5) = \frac{35}{2}.$$

Antal områden som därvid bildas är då

$$r = e + 2 - 7 = e - 5.$$

Vi betraktar nu incidenstablå

	$r_1$	$r_2$	$\dots$	$r_r$
$e_1$				
$e_2$				
$\vdots$				
$e_e$				

där vi skriver en etta i rad  $i$  och kolonn  $j$  om kanten  $e_i$  är en gräns till området  $r_j$ . Annars skriver vi en nolla. Radsumman är då 2 och totala antalet ettor är  $2e$ . Varje kolonnsumma är minst tre så antalet ettor är då minst  $3r$ . Alltså

$$3r \leq 2e$$

Då  $r = e - 5$  får vi

$$3e - 15 \leq 2e$$

dvs

$$e \leq 15,$$

vilket strider mot att  $e \geq 18$ .

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Betrakta den kompletta bipartita grafen  $K_{20,19}$ . Denna graf har ingen Eulerkrets. Bestäm det minsta antalet kanter som måste tas bort för att den graf som därvid bildas har en Eulerkrets.

**OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.**

**Lösning.** Vi numrerar noderna enligt  $X = \{x_1, \dots, x_{20}\}$  och  $Y = \{y_1, \dots, y_{19}\}$ . I den kompletta grafen  $K_{20,19}$  har alla noder  $x_i$  valensen 19, och alla noder  $y_i$  valensen 20. För att få jämn valens i en  $X$ -nod måste minst en kant tas bort från varje sådan nod, och ingen eller ett jämnt antal kanter från varje  $Y$  nod. Vi tar nu bort kanter nedan:

$(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_2), (x_5, y_3), (x_6, y_3), \dots, (x_{19}, y_{10}), (x_{20}, y_{10})$ .

**SVAR:** Det räcker med att ta bort 20 kanter.