KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	kodnr

Lösning till kontrollskrivning 5B, 21 maj 2015, 13.15–14.15,
i SF1610 Diskret matematik för CINTE, CMETE mfl.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	Den kompletta bipartita grafen $K_{n,m}$ har en Hamiltoncykel om och endast om $n = m \geq 2$.	x	
b)	Om en graf har lika många kanter som noder så har grafen minst en cykel.	x	
c)	Den kompletta grafen K_{2n} har en Eulerkrets för varje jämnt heltal $n \geq 4$.		x
d)	Varje sammanhängande graf med fler kanter än noder har minst två spännande träd.	x	
e)	Den bipartita grafen $K_{2,n}$ är planär för alla positiva heltal n.	x	
f)	När en sammanhängande planär graf med minst tre noder ritas så att inga kanter skär varandra, blir antalet områden som uppstår alltid färre än antalet kanter i grafen.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Grafen G har 8 noder med valenserna 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5 och 6. Ange antalet kanter i grafen.

SVAR: 16

b) (1p) Rita en graf G med 12 noder varav en av noderna har valens (grad) 4, och samtliga övriga noder har valens (grad) 2, och som saknar Hamiltoncykel.

SVAR: Vi ritar en åtta.

c) (1p) Ge ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att det skall finnas en komplett matchning i en bipartit graf.

SVAR: Låt, för en delmängd A till nodmängden X,

$$J(A) = \{y \in Y \mid y \text{ granne med nod i } A\}.$$

Nödvändigt och tillräckligt villkor för att det skall finnas en komplett matchning i en bipartit graf är att

$$|J(A)| \geq |A|$$

för alla delmängder A till X.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Grafen G består av träd. Grafen har 75 noder och 52 kanter. Bestäm antalet träd i G.

OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.

Lösning. Antag antalet träd är t, och att grafen består av träden T_i, för $i = 1, 2, \ldots, t$, med respektive v_i stycken noder och e_i stycken kanter. Vi får då

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_t = 75,$$
$$e_1 + e_2 + \cdots + e_t = 52.$$

Då $v_i = e_i + 1$, erhåler vi efter en substitution

$$(e_1 + 1) + (e_2 + 1) + \cdots + (e_t + 1) = 75,$$

dvs

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_t + t = 75.$$

Vi får då att

SVAR: Antalet träd är $t = 23$.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Grafen G saknar parallella kanter, dvs mellan varje par av noder går högst en kant, och saknar loopar, dvs kanter som ändar i en och samma nod. Antalet noder i grafen är 7 och varje nod har en valens (grad) som är minst 5. Visa att G inte kan vara planär.

OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.

Lösning. Antalet kanter e är då minst

$$e \geq \frac{1}{2}(5 + \cdots + 5) = \frac{35}{2}.$$

Antal områden som därvid bildas är då

$$r = e + 2 - 7 = e - 5.$$

Vi betraktar nu incidenstablån

$$\begin{array}{c|cccc} & r_1 & r_2 & \cdots & r_r \\ \hline e_1 & & & & \\ e_2 & & & & \\ \vdots & & & & \\ e_e & & & & \end{array}$$

där vi skriver en etta i rad i och kolonn j om kanten e_i är en gräns till området r_j. Annars skriver vi en nolla. Radsumman är då 2 och totala antalet ettor är $2e$. Varje kolonnsumma är minst tre så antalet ettor är då minst $3r$. Alltså

$$3r \leq 2e$$

Då $r = e - 5$ får vi

$$3e - 15 \leq 2e$$

dvs

$$e \leq 15,$$

vilket strider mot att $e \geq 18$.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Betrakta den kompletta bipartita grafen $K_{22,21}$. Denna graf har ingen Eulerkrets. Bestäm det minsta antalet kanter som måste tas bort för att den graf som därvid bildas har en Eulerkrets.

OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.
Lösning. Vi numrerar noderna enligt $X = \{x_1, \ldots, x_{22}\}$ och $Y = \{y_1, \ldots, y_{21}\}$.

I den kompletta grafen $K_{22,21}$ har alla noder x_i valensen 21, och alla noder y_i valensen 22. För att få jämn valens i en X-nod måste minst en kant tas bort från varje sådan nod, och ingen eller ett jämnt antal kanter från varje Y nod. Vi tar nu bort kanter nedan:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_1),\ (x_3, y_2),\ (x_4, y_2),\ (x_5, y_3),\ (x_6, y_3),\ \ldots\ (x_{21}, y_{11}),\ (x_{22}, y_{11}).$$

SVAR: Det räcker med att ta bort 22 kanter.