Institutionen för matematik
KTH
Michael Benedicks

Förslag till lösningar till tentamen i Komplex analys, SF1628, del A, den 11 februari 2012

1. Antag att funktionen $f(z)$ är analytisk i ett öppet område Ω i komplexa talplanet och antag att $f(z) \neq 0$ för alla z i Ω. Visa att funktionen

$$u(z) = \log |f(z)|$$

är harmonisk i Ω.

Lösning. Vi skriver $u(z) = \log |f(z)| = \mathrm{Re} \log f(z)$ där $\log f(z)$ är en analytisk funktion i varje cirkelskiva $B(z, r_0) = \{z : |z - z_0| < r_0\}$ som är innehållen i Ω. $\log f(z)$ är bestämd frånsett en rent imaginär konstant. Eftersom vi vet att $\mathrm{Re}F(z)$ är harmonisk om $F(z)$ analytisk får vi då denna princip tillämpas på $F(z) = \log f(z)$ att $u(z)$ är harmonisk.

2. Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2}$$

kan utvecklas i Laurentserie omkring $z = i$. Det finns två möjliga konvergensområden för sådana Laurentserier. Ange dessa områden och de båda serierna.

Lösning. De två tänkbara områdena för Laurentserieutveckling är

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - i| < 2\}$$

och

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| > 2\}.$$

Vi partialbråksuppdelar $f(z)$ och skriver

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z - i} - \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z + i} \\ &= T_1 + T_2. \end{aligned}$$

T_1 är redan på Laurentserieform i båda områdena.

I området D_1 kan termen T_2 skrivas som

$$\begin{aligned} T_2 &= -\frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z + i} = -\frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{2i + (z - i)} \\ &= -\frac{1}{(2i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{(2i)^n} (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{(2i)^{n+2}} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

I området D_2 kan termen T_2 skrivas som

$$\begin{aligned} T_2 &= -\frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{(z-i)} \cdot \frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2i)^{m-1}}{(z-i)^{m+1}} \cdot (-1)^{m+1} = [m+1=-n] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n \cdot (2i)^{-n-2}(z-i)^n. \end{aligned}$$

Observera att termen svarande mot $n=-1$ kompenserar T_1.

Svar. I området $0 < |z-i| < 2$ är Laurentserien

$$\frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z-i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2i)^{n+2}}(-1)^{n+1}.$$

I området $|z-i| > 2$ är serien

$$\sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^n \cdot (2i)^{-n-2}(z-i)^n.$$

3. Använd argumentprincipen för att bestämma antalet nollställen i högra halvplanet till funktionen $P(z) = z^4 + z^3 + 6z^2 + 3z + 5$.

Vi betraktar argumentvariationen av $p(z)$ längs kurvan $\Gamma_R = C_R + I_R$ där C_R är halvcirkeln i positiv led från $-iR$ till iR, dvs. $\Gamma_R(\varphi) = Re^{i\varphi},\ -\pi \le \theta \le \pi$ och I_R är det räta linjestycket längs imaginära axeln från iR till $-iR$.

Vi får

$$\begin{aligned} \Delta_{C_R} \arg p(z) &= \Delta_{C_R} \arg z^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{6}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{5}{z^4}\right) \\ &= \Delta_{C_R} \arg z^4 + \Delta_{C_R} \arg \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{6}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{5}{z^4}\right) \\ &\approx 4\pi. \end{aligned}$$

För argumentvariationen längs I_R får man tabellen

y	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	∞
$u(y)$	$+\infty$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+\infty$
$v(y)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$

Denna tabell ger att gäller att $\lim_{R\to\infty} \arg\ p(iR) = -0$ och att $\lim_{R\to\infty} \arg\ p(-Ri) = -4\pi + 0$. Den totala argumentvariationen blir då för R tillräckligt stort

$$\Delta_{\Gamma_R} p(z) = -4\pi + 4\pi = 0.$$

Svar. Det finns inga nollstän i högra halvplanet.

4. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2+2x+x^2)^2}\, dx$$

med residukalkyl.

Lösning. Låt C_R vara halvcirkeln från R till $-R$ i övre halvplanet. Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(2+2z+z^2)^2}$$

har en dubbelpol i övre halvplanet då $z^2 + 2z + 2 = 0$, $\mathrm{Im}(z) > 0$, dvs. då $z = -1 + i$.

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{(2+2x+x^2)^2}\,dx + \int_{C_R} \frac{1}{(2+2z+z^2)^2}\,dz = 2\pi i \ \mathrm{Res}_{z=-1+i} f(z). \tag{1}$$

Residun i $z = -1 + i$ ges av formeln för en residu i en dubbelpol.

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left[f(z), z=-1+i\right] &= \lim_{z\to -1+i} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+1-i)^2}{(2+2z+z^2)^2}\right] \\ &= -\frac{2}{(z+1+i)^3}\bigg|_{z=-1+i} = -\frac{i}{4}.\end{aligned}$$

Uppskattningen av integralen längs halvcirkeln blir

$$\left|\int_{C_R} \frac{1}{(2+2z+z^2)^2}\,dz\right| \le \int_{C_R} \frac{1}{(|z|^2-2|z|-2)}\,|dz| \le \frac{\pi R}{(R^2-2R-2)^2} \to 0$$

då $R \to \infty$. Då $R \to \infty$ i (1) fås att den sökta integralen är $2\pi i \cdot \frac{-i}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Svar. Integralen är $\frac{\pi}{2}$.

5. Finn en Möbiustransformation (bilinjär avbildning) sådan att högra halvplanet i z planet avbildas på enhetsskivan i w-planet och är sådan att punkten $z = 1$ avbildas på $w = 0$ samt punkten $z = 0$ avbildas på $w = 1$.

Lösning.

Metod 1. Eftersom $z = 1$ avbildas på $w = 0$ måste spegelpunkten till $z = 1$ i imaginära axeln, dvs. $z = -1$ avbildas på $w = \infty$. Avbildningen måste då vara på formen

$$w = a \cdot \frac{z-1}{z+1}.$$

Villkoret $w(0) = 1$ ger $a = -1$.

Metod 2. Använd dubbelförhållandet, se t.ex. Wunsch Example 3, sid 547.

Svar. Avbildningen är

$$w = \frac{1-z}{1+z}.$$