Institutionen för matematik
KTH
Michael Benedicks

Lösningsförslag till tentamen i Komplex analys, SF1628, den 15 januari 2010

1. Låt $u(x,y) = e^{2x}\sin 2y + x$. Finn en funktion $f(z)$ som är analytisk i hela planet med $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$, där $z = x + iy$, och sådan att $f(0) = 0$.

Lösning Vi vill hitta funktion $v(x,y)$, så att Cauchy-Riemanns ekvationer är uppfyllda:

$$\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial y}v$$

och

$$\frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}v.$$

Vi har $\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = 2e^{2x}\sin 2y + 1$, och primitivfunktionen till detta är

$$v(x,y) = -e^{2x}\cos 2y + y + C(x),$$

där $C(x)$ är någon funktion som bara beror på x. Vi har

$$\frac{\partial}{\partial x}v(x,y) = -2e^{2x}\cos 2y + C'(x).$$

Då $\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = 2e^{2x}\cos 2y$, ser vi att $C'(x) = 0$. Därför är $C(x)$ konstant, och

$$\begin{aligned} f(z) = u(z) + iv(z) &= e^{2x}\sin 2y + x + i\left(-e^{2x}\cos 2y + y + C_1\right) \\ &= -ie^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y) + z + C_2 = -ie^{2z} + z + C_2. \end{aligned}$$

För att $f(0) = -i + C_2 = 0$, är $C_2 = i$.

2. Låt $\sqrt{z}$ beteckna principalgrenen av $z^{1/2}$ fastlagd genom att $\sqrt{z} = 1$ för $z = 1$ och låt

$$f(z) = 2\sin\sqrt{z}.$$

Beräkna $f'(i\pi^2/2)$ på formen $a + ib$.

Lösning Vi har

$$\frac{d}{dz}z^{1/2} = \frac{1}{2z}z^{1/2},$$

och därför

$$f'(z) = 2\cos z^{1/2}\frac{1}{2z}z^{1/2}.$$

För $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$, har vi

$$z^{1/2} = r^{1/2}e^{i\theta/2},$$

för att detta val av gren uppfyller villkoret $1^{1/2} = 1$. Så, $(i\pi^2/2)^{1/2} = \pi e^{i\pi/4}/\sqrt{2} = \pi(1+i)/2$, och

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= 2\cos\left(\pi\frac{(1+i)}{2}\right)\frac{2}{2\pi^2 i}\pi(1+i)/2 \\
&= \left(e^{i\frac{\pi}{2}(1+i)} + e^{-i\frac{\pi}{2}(1+i)}\right)\frac{(1-i)}{2\pi} \\
&= \left(e^{-\pi/2}i - e^{\pi/2}i\right)\frac{(1-i)}{2\pi} = \frac{e^{-\pi/2}-e^{\pi/2}}{2\pi} + \frac{e^{-\pi/2}-e^{\pi/2}}{2\pi}i \\
&= -\frac{\sinh(\pi/2)}{\pi} - \frac{\sinh(\pi/2)}{\pi}i
\end{aligned}
$$

3. Bestäm det antal nollställen som polynomet

$$P(z) = z^3 + 3z^2 + z + 6$$

har i det högra respektive det vänstra halvplanet.

Lösning Vi använder Nyquists metod. Låt C_R beteckna kurvan som börjar i punkt $-Ri$ och går till punkten Ri längs en halvcirkel med radie R och centerpunkt 0. Gränsvärdet av argumentskillnaden $\arg P(Ri) - \arg P(-Ri)$ när z går längs kurvan C_R blir 3π när $R \to \infty$, eftersom P är av grad 3 (se boken s. 492).

Låt C_I beteckna kurvan som går från iR till $-iR$ längs den imaginära axeln. Vi kan parametrisera C_I med $z = iy$, och

$$P(iy) = -iy^3 - 3y^2 + iy + 6 =: u(y) + iv(y),$$

där $u(y) = -3y^2 + 6$ och $v(y) = -y^3 + y$. Nollställena till u är $\pm\sqrt{2}$ och till v $-1, 0$ och 1. Teckentabellen blir

	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$
u	0	3	6	3	0
v	$\sqrt{2}$	0	0	0	$-\sqrt{2}$

När R är stort, börjar kurvan $P(C_I)$ nära imaginära axeln i tredje kvadranten, för att båda u och v är negativa när y är stort positivt tal och v har högre grad än u. Den korsar imaginära axeln när parametern $y = \sqrt{2}$. Nästa gång korsar kurvan $P(C_I)$ den imaginära axeln när $y = -\sqrt{2}$. Slutpunkten av $P(C_I)$ ligger i den andra kvadranten nära imaginära axeln, igen för att v har högre grad än u. Argumentskillnaden när $R \to \infty$ längs $P(C_I)$ blir π. Argumentskillnaden längs $C_R + C_I$ är därför $3\pi + \pi = 4\pi$, vilket innebär 2 nollställen i högra halvplanet (argumentprincipen). Det finns därför ett nollställe i det vänstra halvplanet.

4. På vilket område avbildar funktionen

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

det övre halvplanet.

Lösning Vi ska hitta bilden av randkurvan $\mathrm{Im} z = 0$ först. Bilden av denna är antingen en cirkel eller en linje. Därför räcker det att testa med tre punkter, t.ex $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$. Dessa avbildas till punkter $w_1 = \frac{-1-i}{-1+i} = i, w_2 = -1, w_3 = \frac{1-i}{1+i} = -i$. Bilden av $\mathrm{Im} z = 0$ är därför enhetscirkeln $|w| = 1$. Nu vet vi att bilden av $\mathrm{Im} z > 0$ är antingen $|w| < 1$ eller $|w| > 1$. Då punkten i avbildas på 0, är bilden av övre halvplanet enhetsskivan $|w| < 1$.