Institutionen för matematik
KTH
Michael Benedicks

Lösningsförslag till tentamen i Komplex analys, SF1628, den 30 oktober 2014

1. Bevisa med Eulers formel att

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

för alla komplexa tal z.

Lösning. Vänsterledet kan skrivas med Eulers formler som

$$\cos 2z = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2}.$$

Högerledet skrivs, återigen med Eulers formler

$$\begin{aligned}\cos^2 z - \sin^2 z &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}\right)^2 \\ &= \end{aligned}$$

2. Utveckla funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z^2+4}$$

i Laurentserie i området $\{z : |z-2i| > 4\}$.

*Lösning.*Vi får

$$f(z) = \frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{z-2i} - \frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{z+2i} = T_1 + T_2.$$

Den första termen T_1 är redan på Laurentserieform i det givna området. Vi skriver

$$\begin{aligned}T_2 = -\frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{z+2i} &= -\frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{z-2i+4i} \\ &= (-\frac{1}{4i}) \cdot \frac{1}{z-2i} \cdot \frac{1}{1+\frac{4i}{z-2i}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4i} \cdot (-1)^m \left(\frac{(4i)^n}{(z-2i)^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

Här har vi utnyttjat att den geometriska serien är konvergent för $|z-2i| > 4$. Observera att termerna motsvarande $1/(z-2i)$ i T_1 och T_2 tar ut varandra. Efter substitutionen $m = -(n+1)$ fås

Svar. Laurentserien är

$$\sum_{m=-\infty}^{-2} a_m (z-2i)^m$$

där

$$a_m = (-1)^m (4i)^{-m-2}$$

3. Hur många nollställen har polynomet

$$2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 9$$

i cirkelskivan $|z| < 1$.

Lösning. Vi skriver funktionen $p(z) = 2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 9$ som $p(z) = f(z) + g(z)$ där $f(z) = 9$ och $g(z) = 2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z$. På cirkeln $|z| = 1$ får vi med triangelolikheten uppskattningen

$$|g(z)| \le |2z^4| + |-2z^3| + |2z^2| + |-2z| \le 2+2+2+2 = 8 < 9 = |f(z)|$$

Rouches sats ger nu att p har lika många nollställen som f i $|z| < 1$ dvs. inget nollställe.

Alternativt kan man för $|z| \le 1$ använda triangelolikheten för att göra uppskattningen
$|p(z)| \ge 9 - |2z^4| - |-2z^3| - |2z^2| - |-2z| \ge 9-2-2-2-2 = 1$ och detta visar direkt att inget nollställe finns i den *slutna* enhetscirkeln, ett något starkare resultat än det som efterfrågas.

Svar. Det givna polynomet har inget nollställe i $|z| < 1$

4. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + x + 1}\, dx.$$

med residykalkyl. Fullständiga argument med angivande av alla uppskattningar krävs för full poäng.

Lösning.

Betrakta funktionen

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 1},$$

och integrera f runt den enkla slutna kurvan Γ_R som består av halvcirkeln C_R i det övre halvplanet med radie R, samt linjen från $z = -R$ till $z = R$. Nämnaren $(z^2 + z + 1)^2$ kan skrivas som $(z + \frac{1}{2} + i\sqrt{3}/2)(z + \frac{1}{2} - \sqrt{3}/2)$ medan täljaren e^{iz} är skild från noll för alla z. Därmed ser vi att det finns två poler av första ordningen, varav polen $z = -\frac{1}{2} + i\sqrt{3}/2$ är den enda som ligger innanför Γ_R (om vi utan inskränkning antar att $R > 10$, säg). Residysatsen ger

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 1}\, dz &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2 + z + 1}\, dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 1}\, dz \\
&= 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), -2 + i] \\
&= 2\pi i \left.\frac{e^{iz}}{2z + 1}\right|_{z = -\frac{1}{2} + i\sqrt{3}/2} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}/2} (\cos\frac{1}{2} - i \sin\frac{1}{2}) w
\end{aligned}$$

På C_R kan vi använda ML-olikheten. L fås som πR, och då $|z^2 + z + 1| \ge |z|^2 - |z| - 1 = R^2 - R - 1$ och vi får att

$$\left|\frac{e^{iz}}{z^2 + z + 1}\right| \le \frac{e^{-y}}{R^2 - R - 1} \le \{y \ge 0 \text{ på } C_R\} \le \frac{1}{R^2 - R - 1} = M.$$

Nu ser vi att

$$0 \leq \left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+z+1}\,dz \right| \leq ML = \frac{\pi R}{R^2-R-1} \to 0,$$

då $R \to \infty$

Detta ger avslutningsvis att

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+z+1}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\,dx.$$

så

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}/2}(\cos\frac{1}{2} - i\sin\frac{1}{2})$$

och om vi identifierar imaginärdelarna i den sista ekvationen fås

*Svar.*Den sökta integralen är

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}/2}\cos\frac{1}{2}.$$

5. Finn alla Möbiustransformationer som avbildar högra halvplanet på enhetscirkeln $|z| < 1$.

Lösning. En punkt i högra halvplanet måste avbildas på 0 i w-planet. Kalla denna punkt z_0. Dess spegelpunkt i imaginära axeln är $-\bar{z}_0$ och denna punkt måste avbildas på ∞.

Detta innebär att den sökta Möbiustransformationen är på formen

$$w = c\frac{z-z_0}{z+\overline{z_0}}.$$

c bestäms av att $|w(0)| = 1$. Vi får

$$|w(0)| = |c| \cdot \left| \frac{z_0}{\overline{-z_0}} \right| = 1,$$

vilket ger $|c| = 1$, dvs. $c = e^{i\alpha}$ där α är reellt.

Svar. Samtliga Möbiustransformationer av denna typ utgörs av

$$w = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z+\overline{z_0}}$$

där α är reellt.