Institutionen för matematik
KTH
Michael Benedicks

Förslag till lösningar till tentamen i Komplex analys, SF1628, del A, den 9 januari 2015

Antag att funktionen $f(z)$ är analytisk i ett öppet område Ω i komplexa talplanet. Låt $u(z) =$ Re f(z) och $v(z) =$ Im f(z) Ω. Visa att funktionen

$$h(z) = u(z)^2 - v(z)^2$$

är harmonisk i Ω.

Lösning. Bilda funktionen $g(z) = f(z)^2$ som är analytisk i Ω. Vi ser att

$$g(z) = (u(z) + iv(z))^2 = u(z)^2 - v(z)^2 + 2iu(z)v(z)$$

och eftersom realdelen av en analytisk funktion är harmonisk är

$$\operatorname{Re} g(z) = u(z)^2 - v(z)^2$$

harmonisk.

2. Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{4 + z^2}$$

kan utvecklas i Laurentserie omkring $z = 2i$. Det finns två möjliga konvergensområden för sådana Laurentserier. Ange dessa områden och de båda serierna.

Lösning. De två tänkbara områdena för Laurentserieutveckling är

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 2i| < 4\}$$

och

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| > 4\}.$$

Vi partialbråksuppdelar $f(z)$ och skriver

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{z - 2i} - \frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{z + 2i} \\ &= T_1 + T_2. \end{aligned}$$

T_1 är redan på Laurentserieform i båda områdena.

I området D_1 kan termen T_2 skrivas som

$$\begin{aligned} T_2 &= -\frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{z + 2i} = -\frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{4i + (z - 2i)} \\ &= -\frac{1}{(4i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - 2i)^n}{(4i)^n} (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - 2i)^n}{(4i)^{n+2}} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

I området D_2 kan termen T_2 skrivas som

$$
\begin{aligned}
T_2 &= -\frac{1}{4i}\cdot\frac{1}{(z-2i)}\cdot\frac{1}{1+\frac{4i}{z-2i}}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(4i)^{m-1}}{(z-2i)^{m+1}}\cdot(-1)^{m+1} = [m+1=-n]\\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n\cdot(4i)^{-n-2}(z-2i)^n.
\end{aligned}
$$

Observera att termen svarande mot $n=-1$ kompenserar T_1.

Svar. I området $0<|z-2i|<4$ är Laurentserien

$$\frac{1}{4i}\cdot\frac{1}{z-2i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{(4i)^{n+2}}(-1)^{n+1}.$$

I området $|z-2i|>4$ är serien

$$\sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^n\cdot(4i)^{-n-2}(z-2i)^n.$$

3. Använd argumentprincipen för att bestämma antalet nollställen i högra halvplanet till polynomet $P(z)=z^4+8z^3+3z^2+8z+3$.

Vi betraktar argumentvariationen av $P(z)$ längs kurvan $\Gamma_R=C_R+I_R$ där C_R är halvcirkeln i positiv led från $-iR$ till iR, dvs. $\Gamma_R(\varphi)=Re^{i\varphi},\ -\pi\le\theta\le\pi$ och I_R är det räta linjestycket längs imaginära axeln från iR till $-iR$.

Vi får

$$
\begin{aligned}
\Delta_{C_R}\arg\,P(z) &= \Delta_{C_R}\arg z^4\cdot\left(1+\frac{8}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{8}{z^3}+\frac{3}{z^4}\right)\\
&= \Delta_{C_R}\arg\,z^4+\Delta_{C_R}\arg\left(1+\frac{8}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{8}{z^3}+\frac{3}{z^4}\right)\\
&\approx 4\pi.
\end{aligned}
$$

På I_R kan vi skriva $P(iy)=u(y)+iv(y)$ där $u(y)=y^4-3y^2+3$ och $v(y)=-8y^3+8y$. Man ser att u alltid är positiv och v har nollställen i -1, 0 och 1.

För argumentvariationen längs I_R får man tabellen

y	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	∞
$u(y)$	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
$v(y)$	$+\infty$	0	$-$	0	$+$	0	$-\infty$

Denna tabell ger att gäller att $\lim_{R\to\infty}\arg\ p(iR)=+0$ och att $\lim_{R\to\infty}\arg\ p(-Ri)=-0$. Den totala argumentvariationen blir då för R tillräckligt stor

$$\Delta_{\Gamma_R}p(z)=0+4\pi=4\pi.$$

Svar. Det finns två nollställen i högra halvplanet.

4. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+4x+13)^2}\,dx$$

med residukalkyl.

Lösning. Låt C_R vara halvcirkeln från R till $-R$ i övre halvplanet. Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(13 + 4z + z^2)^2}$$

har en dubbelpol i övre halvplanet då $z^2 + 4z + 13 = 0$, $\text{Im}(z) > 0$, dvs. då $z = -2 + 3i$.

Residusatsen ger

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{(13 + 4x + x^2)^2}\,dx + \int_{C_R} \frac{1}{(13 + 4z + z^2)^2}\,dz = 2\pi i \ \text{Res}_{z=-2+3i} f(z). \tag{1}$$

Residun i $z = -2 + 3i$ ges av formeln för en residu i en dubbelpol.

$$\begin{aligned}\text{Res}\,[f(z), z = -2 + 3i] &= \lim_{z \to -1+i} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z + 2 - 3i)^2}{(13 + 4z + z^2)^2} \right] \\ &= -\frac{2}{(z + 2 + 3i)^3}\bigg|_{z=-2+3i} = -\frac{i}{108}.\end{aligned}$$

Uppskattningen av integralen längs halvcirkeln blir

$$\left| \int_{C_R} \frac{1}{(13 + 4z + z^2)^2}\,dz \right| \le \int_{C_R} \frac{1}{(|z|^2 - 4|z| - 13)}\,|dz| \le \frac{\pi R}{(R^2 - 4R - 13)^2} \to 0$$

då $R \to \infty$. Då $R \to \infty$ i (1) fås att den sökta integralen är $2\pi i \cdot \frac{-i}{108} = \frac{\pi}{54}$.

Svar. Integralen är $\frac{\pi}{54}$.

5. Låt Möbiustransformationen

$$T(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

vara given. Finn bilden under denna avbildning av området

$$G = \{z : |z| < 1\} \cap \{z : |z - 1| < 1\}.$$

Lösning. Låt

$$w(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

Eftersom $z = -i$ ligger på den första cirkeln avbildas den på en rät linje som går genom 0 som är bilden av i. Bilden av 1 är

$$w(1) = \frac{1 - i}{1 + i} = -i$$

och linjen måste vara imaginära axeln. Eftersom $w(0) = -1$ måste bilden av cirkelskivan vara vänstra halvplanet.

Bilden av den andra cirkel $|z - 1| = 1$ är en cirkel som går genom $w(0) = -1$, Skärningspunkterna mellan cirklarna är

$$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Man ser att $w(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}) = i(-2 \pm \sqrt{3})$. Bilden av cirkeln $|z-1| < 1$ måste vara en cirkel genom punkterna -1 och $-2 \pm \sqrt{3}$. Cirkelns medelpunkt måste ligga på linjen $y = -2$ och man ser med enkel geometri att bildcirkeln är

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

Eftersom orientering bevaras ser man att bilden är cirkelskivan $|z+1+2i| < 2$.

Svar Bilden är den del av cirkeln $|z+1+2i| < 2$ som ligger i vänstra halvplanet.