1. $\frac{dy}{dx}+x(y-1)^3=0 \xrightarrow{y\neq 1} \int\frac{dy}{(y-1)^3}=-\int x\,dx=-\frac{x^2}{2}+C_1$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$y_1(x)\equiv 1$ är en lösning $\qquad -\frac{1}{2(y-1)^2}+C_2 \Rightarrow y_\pm(x)=1\pm\frac{1}{\sqrt{x^2+C}}$

För alla $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ finns en lösning till $y'=f(x,y):=-x(y-1)^3$ med $y(x_0)=y_0$;

för $y_0=1$: $y(x)\equiv 1$, för $y_0>1$: $y(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x^2-x_0^2+\frac{1}{(y_0-1)^2}}}$,

för $y_0<1$: $y(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x^2-x_0^2+\frac{1}{(y_0-1)^2}}}$

2. $y''+2y'+y=x^2$

Steg 1 ($y''+2y'+y=0$): $\lambda^2+2\lambda+1=0$, $\lambda_+=\lambda_-=-1$, $y_H(x)=(c+dx)e^{-x}$

Steg 2: Ansats $y(x)=ax^2+bx+c$ ($y'=2ax+b$, $y''=2a$)

$2a+2(2ax+b)+(ax^2+bx+c)\overset{!}{=}x^2 \Rightarrow a=1, b=-4, c=6$

Steg 3: $y(x)=y_H(x)+y_p(x)$ $\qquad y_p(x)=x^2-4x+6$

IVP $y(0)=6$, $y'(0)=-4 \Rightarrow y(x)=x^2-4x+6$

3. Steg 1: $y'+2xy=0 \Rightarrow y_H(x)=Ce^{-x^2}$

Steg 2: Ansats $y_p=C(x)e^{-x^2}$ ($y_p'=(C'-2xC)e^{-x^2}$)

$(C'-2xC+2xC)e^{-x^2}=1 \Rightarrow C'=e^{+x^2} \Rightarrow C(x)=\int_{x_0}^{x}e^{u^2}du$

Steg 3: $y(x)=Ce^{-x^2}+e^{-x^2}\int_{x_0}^{x}e^{u^2}du$

IVP $y(\frac{1}{2})=1$: $y(\frac{1}{2})=Ce^{-\frac{1}{4}}+e^{-\frac{1}{4}}\int_{x_0}^{\frac{1}{2}}e^{u^2}du \overset{!}{=} 1$

Om man väljer $x_0=\frac{1}{2}$, så måste $C=e^{+\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow y(x)=e^{\frac{1}{4}-x^2}+e^{-x^2}\int_{1/2}^{x}e^{u^2}du$ är den lösningen till $y'+2xy=1$, $y(\frac{1}{2})=1$