Institutionen för matematik, KTH
Tentamen SF1634, 18/8–2015

Mathematical Handbook (Beta) är ett tillåtet hjälpmedel, men inga elektroniska hjälpmedel accepteras. Ett råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar. Varje godkänt KS ger 1 bonuspoäng.

Betygsgränser: E 10, D 12, C 14, B 16, A 18. Minst 9 poäng men ej godkänt ger resultatet FX, som innebär rätt till muntlig komplettering.

1. Bestäm den allmänna lösningen till
$$y'' + y = \sin 2x.$$
(2 poäng)

2. Bestäm den allmänna reella lösningen till
$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x},$$
för alla reella $a \neq -\frac{1}{8}$. (3 poäng)

3. Bestäm Fouriertransformen av
$$x(t) = \delta(7t-2) + 5\sin(t+1) + e^{-|t+3|}.$$
(3 poäng)

4. Vad betyder "utveckla en funktion $f(x)$, $x \in (-\pi, +\pi)$, som en 2π-periodisk Fourierserie $\tilde{f}(x)$"? Skriv en formel för $\tilde{f}(x)$! (1 poäng)

5. Bestäm lösningen till
$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in [0,a] \times [0,b]$$
$$u(x,0) = 0,\ u(x,b) = f(x), \quad (x \in (0,a))$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0 \quad (y \in (0,b)).$$
(4 poäng)

6. Visa genom variabelseparation (och implicit lösning) att differentialekvationen
$$zvv' + v^2 - 2v + \frac{3}{4} = 0, \quad z \in (0, +\infty)$$
har oändligt många (monotont växande) lösningar som uppfyller
$$v(z) \to 1/2 \text{ då } z \to 0,$$
$$v(z) \to 3/2 \text{ då } z \to +\infty.$$
(4 poäng)

7. Lösningar $z(x, y)$ till den partiella differentialekvationen

$$z_{xx}(1 + z_y^2) + z_{yy}(1 + z_x^2) = 2z_x z_y z_{xy} \qquad (*)$$

kan hittas med hjälp av ansatsen

$$z(x, y) = u(f_1(x) + f_2(y)),$$

respektive

$$f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) = 0, \quad u(-f_3(z)) = z,$$

$$f_i'^2(x_i) = a_i + b_i e^{\gamma f_i} + c_i e^{-\gamma f_i} \quad (i = 1, 2, 3;\ x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z).$$

Visa att $z(x, y)$ definierad från

(a) $y \cos z = x \sin z$ eller

(b) $x^2 + y^2 = (\cosh z)^2$ eller

(c) $\sin z = \sinh x \sinh y$ eller

(d) $e^z \cos x = \cos y$

är lösningar till (*). (4 poäng)