Institutionen för Matematik, KTH Tentamen SF1634 4/5 2015

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel, men inga elektroniska hjälpmedel tillåtna. Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar. Varje godkänt KS ger 1 Bonuspoäng

Betygsgränser: E 10, D 12, C 14, B 16, A 18

Minst 9 poäng, men ej godkänt, ger resultat FX, som innebär rätt till (muntlig) komplettering.

1. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$6y' = y^2 - 9 \tag{1}$$

och en speciell lösning som uppfyller $y(0) = -3$
(3 pöang).

2. Bestäm den allmänna lösningen till

$$y'' + y' + y = \cos x + \sin x \tag{2}$$

(3 poäng)

3. Bestäm den allmänna lösningen till

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \tag{3}$$

(2 poäng)

4. Lös

$$y'' - y = \delta(t-1),\ t \geq 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \tag{4}$$

med hjälp av Laplacetransformationen.

(3 poäng)

5. Bestäm Fouriertransformen av

$$x(t) = \delta(5t-3) + e^{-|t-2|} \tag{5}$$

(3 poäng)

6. Bestäm alla kritiska punkter $(\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_{n\geq 2}})$ av systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x^2 + 2y^2 - 3 \\ \dot{y} &= 2x^2 - y \end{aligned} \tag{6}$$

och (genom linjärisering kring $\vec{x_i}, i = 1 \ldots, n$) deras typ (dvs om stabil eller instabil). (3 poäng)

7. Låt $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Komponenterna $y_1(x,t)$ och $y_2(x,t)$ av

$$\vec{y} = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} \cos(m(x+t)) \\ \sin(m(x+t)) \end{pmatrix} + \frac{1}{2n}\begin{pmatrix} \cos(n(x-t)) \\ \sin(n(x-t)) \end{pmatrix} \tag{7}$$

löser $\ddot{y} - y'' = 0$ och är 2π-periodiska funktioner med avseende på x och t (dvs $\vec{y}(x+2\pi, t) = \vec{y}(x,t) = \vec{y}(x, t+2\pi)$). $\vec{y}(x,t)$ uppfyller även

$$\begin{aligned} \dot{\vec{y}}\vec{y}\,' \ (= \dot{y}_1 y_1' + \dot{y}_2 y_2') &= 0 \\ (\dot{\vec{y}})^2 + (\vec{y}\,')^2 \ (= (\dot{y}_1)^2 + (\dot{y}_2)^2 + (y_1')^2 + (y_2')^2) &= 1 \end{aligned} \tag{8}$$

och man kan visa att varje (2 gånger differentierbar) $\vec{y}$ som löser (8) också löser

$$\ddot{\vec{y}} - \vec{y}\,'' = \vec{0} \tag{9}$$

om $\dot{\vec{y}}$ och $\vec{y}\,'$ är linjärt oberoende (dvs icke parallella).

a) Lös (8) via Ansatsen

$$\vec{y}\,' = \cos\psi \begin{pmatrix} \cos\chi \\ \sin\chi \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{y}} = \sin\psi \begin{pmatrix} -\sin\chi \\ \cos\chi \end{pmatrix} \tag{10}$$

Eftersom $(\vec{y}\,')^{\cdot} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial \vec{y}}{\partial x})$ måste vara lika med $(\vec{y}\,^{\cdot})' = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \vec{y}}{\partial t})$, visa att

$$\begin{aligned} \chi &= f(x+t) + g(x-t) \\ \psi &= f(x+t) - g(x-t) \end{aligned} \tag{11}$$

Hitta ett val av f och g som ger (7). Vad är $\dot{\vec{y}}(x,0)$ och $\vec{y}\,'(x,0)$ om $f = g = h/2$?

(2 poäng)

b) Lös (9) (för, med avseende på x, och avseende på t, 2π periodiska funktioner y_1 och y_2) för $x \in [0, 2\pi]$, $t \in [0, 2\pi]$, genom separation av variabler tekniken, med bivillkor $\dot{\vec{y}}(x,0) = \vec{0}$; sedan, istället för att lösa $\vec{y}\,'^2(x,0) = 1$ bestäm relationen mellan Fourierkoeffisienterna av $\vec{y}\,'(x,0)$ och Fourierutvecklingen av $\cos(h(x))$ och $\sin(h(x))$, för givna $h(x)$, $x \in [0, 2\pi]$, som uppfyller $h(2\pi) = h(0) + 2k\pi$, k ett heltal) (2 poäng)