

Något om Kursen, förväntningar, ansvar och skrivande.

Att välja upplägg. En av de aspekter av skrivande som vi kommer att titta närmre på är hur ni lägger upp uppsatsen. Speciellt så vill vi att ni gör medvetna redaktionella val. Ni måste formulera ert syfte med uppsatsen och sen se till att allt i uppsatsen verkar till att fullfölja detta syfte.

Säg att er uppsats handlar om skogsavverkning. Vill ni använda det som ett exempel för hur man använder matematik för att lösa tillämpade problem? Eller skriver ni med en tänkt skogsmästare i åtanke vars ända intresse är att göra så stor profit som möjligt? Hur kommer det att påverka er uppsats?

Ert skrivande kommer att kantas av olika val. Nedan följer tre exempel på valsituationer som ni kommer att konfronteras med:

EXEMPEL 1: (Introduktionen) Hur introducerar ni er uppsats? Är det bäst att börja med att abstrakt förklara vad ni vill göra? Eller skall ni börja med ett exempel? Eller kanske en intressant frågeställning som ni låter löpa som en röd tråd genom hela uppsatsen? Vill ni sammanfatta hela uppsatsen i ett stycke i introduktionen - eller anser ni det vara onödigt? Kan ni göra introduktionen spännande och medryckande för läsaren?¹

EXEMPEL 2: (Förklaring av en sats.) Säg att följande sats är viktig för ert uppsatsämne:

Sats 1. Låt $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Då kommer $M\mathbf{x} = \mathbf{y}$ att ha en unik lösning $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ om och endast om $\det(M) \neq 0$.

För att kunna skriva om den här satsen så måste ni först förstå den. Sen måste ni välja hur ni vill förklara satsen. Är den satsen så pass självklar, från *algebra och geometri* kursen, att den inte behöver förklaras? Behövs det ett bevis? Eller är det viktigare att ha en geometrisk förståelse av satsen (D.v.s. är det bättre ha med en graf som ritar ut kollon vektorerna $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ samt \mathbf{y} i ett koordinatsystem och förklarar vad satsen betyder.²) Kanske är det inte viktigt att ha unika lösningar för er uppsats och då kanske det skulle räcka att påpeka att $x_1 = \frac{dy_1 - cy_2}{ad - bc}$ och $x_2 = \frac{-by_1 + ay_2}{ac - bd}$ är en lösning - eller behövs ett exempel? Ni måste välja hur ni vill förklara matematiken i er uppsats.

EXEMPEL 3: (Ett exempel om exempel.) Ni kommer att behöva ha med beräknade exempel i uppsatsen. Men för det så behöver ni välja vilka exempel som är viktiga och nödvändiga. Kanske räcker det med ett enda exempel i hela uppsatsen. Kanske behöver ni ett par olika exempel för att gestalta vissa specialfall. Det är viktigt att ni tänker igenom vilka exempel ni väljer att ha med i uppsatsen och varför de är viktiga att ha med. Gör sedan era egna exempel som uppfyller de krav som ni själva har satt upp! Uppsatsen handlar delvis om att visa att ni kan självständigt läsa och förstå en matematisk text - och ni visar detta genom att skapa väl genomtänkta exempel.

Varje sektion, stycke, sats, exempel, definition och förklaring skall föregås av ett medvetet val från er sida. Detta är en skrivövning och att välja att ha samma upplägg och samma förklaringar som i boken tar ifrån uppgiften dess undervisningsvärde. Ni skall därför sträva efter att göra uppsatsen till er egen och efter att göra era egna redaktionella val.

Det finns inga rätt och fel i dessa val. Men det finns bra och dåliga uppsatser. Och redaktionella val som inte är genomtänkta leder till dåliga uppsatser - men väl genomtänkta förklaringar och redaktionella val leder till välskrivna och bra uppsatser.

Samarbete och gruppansvar. En del av den här kursen går ut på att lära sig arbeta i grupp. Ni behöver därför tänka på organisationen av ert arbete. Dels den enkla logistiken - när och var kommer ni att ses. Vad förväntar ni er av varandra inför varje möte. Vad beslutar ni på mötet? Vad gör ni tills nästa möte?

Eftersom uppgiften är formulerad så att alla har ansvar för hela produkten så måste ni organisera er så att alla kan ta ansvar. Specifikt så innebär det att ni läser igenom varandras delar och säkerställer att de är välskrivna. Förslagsvis så går samtliga gruppmedlemmar igenom uppsatsen stycke för stycke och försöker avgöra om stycket är begripligt, om det är meningsfullt, om det är nödvändigt, om det kan förbättras. Om du inte förstår en del av er egen uppsats så är sannolikheten stor att den rättande läraren inte heller kommer att vara nöjd med den delen av uppsatsen. Att dela upp uppsatsskrivandet i tre delar kommer att ge er tre delar av en uppsats - men inte **en** uppsats. Ni måste se till att delarna sammanfogas till en enhet.³

Talspråk/skriftspråk och stil. Betrakta meningen "Ekvationerna ringlar sig ogenomträngligt över sidan likt tagtrådsbarriärerna, i skymningen, framför Sommes skyttegravar." Meningen skulle passa i en kreativ novell. Den gestaltar svårigheten, ogenomträngligheten, något dunkelt och ett förtäckt hot i ekvationerna. Men ni ska inte skriva en kreativ novell utan en teknisk rapport. Detta innebär att er uppsats skall hålla en ganska stram språklig stil. Och när ni känner att ni vill använda ett kreativt eller målande språk så måste ni tygla er. Om ni vill påpeka att en ekvation är allt för svårapplicerbar så skall ni inte använda en allt för målande metafor utan istället hålla ert språk kort och sakligt. Istället för meningen som inleder detta stycke så borde ni, i er uppsats, skriva "Ekvation (14) är, tyvärr, allt för komplicerad för de flesta tillämpningar. Vi kommer därför att...".

Vanligt förekommande i uppsatser från föregående kursomgångar är talspråk. Det finns en tendens att formulera sig i stil med: "Ex är typ lite ensam och skulle behöva en kompis så vi plussar på ett y i ekvationen." Det är lite putslustigt,

¹Något som kanske är viktigare om man skriver om kryptografi än om glassförsäljning.

²Jag är säker på att ni gick igenom relationen mellan determinanter och kollon vektorer i "algebra och geometri".

³Det händer ofta i den här kursen att en uppsats lämnas in där inledningen visar stor förståelse men avslutningen visar stor förvirring. I dessa fall så är det uppenbart att samarbetet inte har fungerat.

nästans charmant, att formulera sig på det sättet. Men det språkbruket hör inte hemma i en teknisk uppsats. För det första så är "x" ett namn på en variabel att skriva "ex" för "x" är inte korrekt. Vidare så är "typ" talspråk, och dessutom ganska ovärdat talspråk, och därför inte acceptabelt. Vidare så är det onödigt att tillskriva känslotillstånd et c. till ekvationerna. Använd istället tråkig kanslisvenska: "Vi adderar y till vänster och högerled i föregående ekvation. Detta leder till..."

Kort sagt så är det viktigt att ni anstränger er för att använda ett formellt språkbruk, lite som kanslisvenska, i er uppsats.

Matematisk formalia. Från tidigare kursomgångar så har det visat sig att något specifikt bör sägas om matematisk formalia.

Formell matematisk text innehåller tre delar: *Sats*,⁴ *Definition* och *Bevis*. Givetvis så fyller man texten med exempel och informella förklaringar mellan dessa delar. Det är viktigt att förstå hur dessa delars funktion i en matematisk text.

DEFINITIONER: En definition förklarar vad ett begrepp betyder. En typisk definition är

DEFINITION 1: [DERIVATA.] Låt $f(x)$ vara en funktion från en omgivning av x_0 till \mathbb{R} . Då säger vi att derivatan av $f(x)$ i punkten x_0 är $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ om detta gränsvärde existerar. Om gränsvärdet inte existerar så säger vi att $f(x)$ inte är deriverbar i punkten x_0 . \square

Den här definitionen talar om exakt vad derivatan av en funktion är - och varje gång vi använder begreppet derivata av f i x_0 så menar vi exakt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, men eftersom detta gränsvärde är besvärligt att skriva så använder vi förkortningen $f'(x_0)$.

Observera att definitionen endast förklarar hur vi använder språket men den har inget teoretiskt innehåll. Följande är alltså inte en definition

DEFINITION 2: [KEDJEREGLN.] Om $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara funktioner från \mathbb{R} till \mathbb{R} och om $h(x) = f(g(x))$ så kommer $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$. \square

Detta är inte en definition eftersom den inte specificerar hur vi använder språket utan den hävdar att vi kan beräkna derivatan av en sammansatt funktion $f(g(x))$ om vi kan beräkna derivatan av $f(x)$ och $g(x)$. Den ger också en formel för hur man beräknar derivatan av sammansatta funktioner. Definition 2 talar därför om relationen mellan begreppen *sammansättning* och *derivata* - detta gör Definition 2 till en sats.

SATSER: Satsen⁵ är det viktigaste matematiska påståendet. En sats är ett påstående om relationen mellan olika begrepp. T.ex. så klargör satsen om mellanliggande värden relationen mellan lösningen av en ekvation $f(x) = c$ och begreppet kontinuerlig funktion. I algebra och geometri så lärde ni er kanske att: "Vektorerna $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ och $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ är parallella om och endast om $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 0, 0)$." Detta är en sats som anger en relation mellan begreppen *parallell* och *kryssprodukt*.

Det är alltid i satser som ni hittar påståenden som hjälper er att lösa matematiska problem. Följande skulle t.ex. kunna vara en tentafråga: "Är $(1, \sqrt{2}, \sqrt{6})$ och $(1/\sqrt{2}, 1, \sqrt{3})$ är parallella." För att lösa den så måste ni hitta en sats som hjälper oss att besvara frågan. I det här fallet så är den sista nämnda satsen till stor hjälp. Det är därför viktigt, för att förstå ert avsnitt, att ni diskuterar och tänker på hur avsnittets satser hjälper er att lösa de problem som formuleras i ert avsnitt. Hur hjälper satsen er att lösa riktiga problem?

Till skillnad från definitionen som bara talar om hur vi använder språket så har satsen ett teoretiskt innehåll. Satsen kan vara sann eller falsk. För att försäkra sig om att man aldrig kallar falska påståenden för satser så kräver man att varje sats är bevisad. Somliga skulle nog vilja definiera sats som "En sats är ett bevisat påstående."

BEVIS: Ett bevis är ett matematiskt argument för ett påstående.

Till skillnad från "vardagsargument" så ställs det väldigt höga krav på matematiska argument. En politiker kan säga "Det är rättvist att de som föds sjukliga måste få vård. Vi måste därför höja skatterna så att vi kan ha en bättre sjukvård." en annan politiker kan argumentera "Det är rättvist att man ska få lön för sin möda. Vi måste därför sänka skatterna för att folk ska få behålla sin lön.". En matematiker skulle säga Vad är definitionen av rättvisa?. D.v.s. i ett bevis så måste alla begrepp som används vara definierade. Vidare så skall alla slutledningar i matematiska argument bygga på sund logik.

Tyvärr så har inte alla satser i Anton-Rorres bevis. Men ni måste på något sätt förhålla er till sanningshalten i era satser. Att bevisa dem själva kan vara svårt då bevisföring är en färdighet som tar mycket tid och träning att behärska. Men kan ni hitta på sätt att övertyga er läsare om att det ni hävdar i alla fall är rimligt. Kan ni förklara vad satsen säger på något intuitivt rimligt sätt? Kanske kan man förklara ett enkelt specialfall med en graf? Det är viktigt att ni i er uppsats visar att ni har tänkt igenom varför de beräkningar ni gör leder till sanna resultat - d.v.s. det är viktigt att ni tänker igenom och förklarar på något sätt varför de satser ni använder är sanna. Ni kan göra detta genom att bevisa dem i er uppsats (i de fall som Anton-Rorres ger ett bevis) eller genom att förklara via en graf eller ett intuitivt argument varför satsen måste vara sann.

Källor och litteratur: I den här kursen så ingår inte litteratursökning och ni förväntas inte att gå till biblioteket och leta andra böcker eller källor för er text. Det räcker med att ha en enda referens (Anton-Rorres) i slutet på er uppsats. Kursen är allt för kort för att ni ska ha tid att göra något större arbete som införlivar fler källor.

⁴Härtill räknas även hjälpsatser, följsatser et c.

⁵På engelska så översätter man "Sats \approx Theorem", "Hjälpsats \approx Lemma" och "Följsats \approx Corollary". Men alla typer av satser är matematiskt ekvivalenta. Man kallar vissa för hjälpsats eller följsats för att hjälpa läsaren att förstå vilka satser som är viktigast.