Institutionen för matematik
KTH
Michael Benedicks

Tentamen i Komplex analys, SF1628, den 11 februari 2012

Skrivtid 8.00-13.00. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv tydliga lösningar med utförliga motiveringar.

För del **A** gäller följande. Uppgifterna poängsätts med maximalt 5 poäng per uppgift. Minst 21 poäng på A-delen ger betyg C och rätt att betygsättas på B-delen. Minst 17 poäng totalt ger betyg D och rätt att betygsättas på del B. 14 poäng ger betyg E. 13 poäng ger betyg Fx, med rätt till komplettering.

Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Den som är godkänd på kontrollskrivning 1 får 5 poäng och ska inte lösa uppgift 1 nedan. Den som är godkänd på kontrollskrivning 2 får 5 poäng och ska inte lösa uppgift 2 nedan. Uppgifterna 3 och 4 på tentan motsvarar de fem inlämningsuppgifterna. Man får tillgodoräkna sig maximalt resultat av det på inlämninguppgifterna alternativt det på tentan. Uppgift 5 har ingen motsvarighet i kontrollskrivningar och inlämningsuppgifter.

För del **B** gäller följande. Först måste man vara godkänd på del **A** med betyg minst D, antingen via kontrollskrivningar och inlämningsuppgifter eller alternativt med komplettering med poäng erhållna på del A enligt ovan.

Betygsättningen görs sedan enligt följande:

Tre eller fler rätt lösta uppgifter på del B ger säkert betyg A.
Två rätt lösta uppgifter på del B ger säkert betyg B.
En rätt löst uppgift på del B ger säkert betyg C.
Betyg C kan också erhållas genom att man uppnår totalt minst 17 poäng på A-delen och minst 21 poäng på A- och B-del tillsammans. Härvid ger uppgifterna på B-delen maximalt 5 poäng vardera.

Det är viktigt att du anger ev. bonuspoäng på tentan.
Kontrollera bonuslistan hos skrivningsvakten.
Lycka till!

Var god vänd!

Del A.

1. Antag att funktionen $f(z)$ är analytisk i ett öppet område Ω i komplexa talplanet och antag att $f(z) \neq 0$ för alla z i Ω. Visa att funktionen

$$u(z) = \log |f(z)|$$

är harmonisk i Ω.

2. Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

kan utvecklas i Laurentserie omkring $z = i$. Det finns två möjliga konvergensområden för sådana Laurentserier. Ange dessa områden och de båda serierna.

3. Använd argumentprincipen för att bestämma antalet nollställen i högra halvplanet till funktionen $P(z) = z^4 + z^3 + 6z^2 + 3z + 5$.

4. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2+2x+x^2)^2}\, dx$$

med residukalkyl.

5. Finn en Möbiustransformation (bilinjär avbildning) sådan att högra halvplanet i z planet avbildas på enhetsskivan i w-planet och är sådan att punkten $z = 1$ avbildas på $w = 0$ samt punkten $z = 0$ avbildas på $w = 1$.

Var god vänd!