Institutionen för matematik.
KTH

Kortfattade lösningar till tentamen i Matematik I, 5B1115, 5B1135, 5B1104, 5B1106, repetitionskurs,

torsdagen den 19/6 2004 kl. 8.00 - 13.00.

1. $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)} - \sqrt{2x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{(\sqrt{2x+2h} - \sqrt{2x})(\sqrt{2x+2h} + \sqrt{2x})}{\sqrt{2x+2h} + \sqrt{2x}} =$

$\lim_{h\to 0} = \frac{1}{h} \frac{(2x+2h-2x)}{\sqrt{2x} + \sqrt{2x+2h}} = \lim_{h\to 0} = \frac{2}{\sqrt{2x+2h} + \sqrt{2x}} =$

$\frac{2}{2\sqrt{2x}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2x}}}.$

2. Implicit derivering av $x^2 + xy + y^3 = 4$ ger:
$2x + y + xy' + 3y^2y' = 0.$
Insättning av punktens koordinater, $(x, y) = (2, 0)$, ger:
$4 + 0 + 2y' + 0 = 0, \quad y' = -2$ i punkten.
Tangenten till kurvan i punkten har alltså lutningen $k = -2$
varför tangentens ekvation blir $y - 0 = (-2)(x - 2)$ eller $\underline{y = -2x + 4}$.

3. $f(x) = \ln(2x^2 + 1) - 2\ln(x + 1), \quad x > -1$.
$f'(x) = \frac{4x}{2x^2+1} - \frac{2}{1+x} = \frac{4x(x+1) - 2(2x^2+1)}{(2x^2+1)(1+x)} =$
$\frac{4x-2}{(2x^2+1)(1+x)} = 0$, för $x = 1/2$.

Man finner att $f'(x) > 0$, dvs $f(x)$ är växande då $x > 1/2$ och $f'(x) < 0$, dvs $f(x)$ är avtagande, då $-1 < x < 1/2$.
Därför är punkten $x = 1/2$, $y = -\ln(3/2)$ ett lokalt minimum . Denna punkt är det enda extremvärdet för funktionen i intervallet $x > -1$.

4A. SVAR:
$$\underline{y = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x) + \frac{x^2}{5} + \frac{4x}{25} - \frac{2}{125}.}$$

4B. SVAR:
$$\underline{y = e^x(\cos 2x - \sin 2x).}$$

5. x-koordinaterna för skärningspunktern mellan de givna kurvorna uppfyller ekvationen

$$\frac{32}{x^2+4} = 2x+8, \quad 32 = 2x^3 + 8x^2 + 8x + 32, \quad 0 = 2x(x^2+4x+4)$$

$$0 = 2x(x+2)^2.$$

Man får alltså skärning för $x = -2$ och $x = 0$.

Arean blir $\quad A = \int_{-2}^{0}(\frac{32}{x^2+4} - (2x+8))dx =$

$$\Big[8 \cdot 2\arctan(x/2) - x^2 - 8x\Big]_{-2}^{0} = 0 - (16(\tfrac{-\pi}{4}) - 4 + 16) = \underline{4\pi - 12}$$

6A.

$P(n): \quad \sum_{j=1}^{n} j = n(n+1)/2 \quad$ skall visas för $n = 1, 2, ...$

Bevis:

1. $\quad P(1): \quad VL = 1, \quad HL = 1 \cdot 2/2 = 1$ Stämmer.

2. Antag $P(m): \quad \sum_{j=1}^{m} j = m(m+1)/2.$

$P(m+1): \quad \sum_{j=1}^{m+1} j = (m+1)(m+2)/2$ skall visas.

VL i $P(m+1) = \quad \sum_{j=1}^{m} j + (m+1) =$[enligt antagandet]$=$

$m(m+1)/2 + (m+1) = (m+1)(m/2+1) = (m+1)(m+2)/2 = HL.$

VSB.

6B. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-1}$ $\quad$ <u>divergerar</u>, eftersom

$$\frac{n+2}{n^2-1} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \text{ och } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ är divergent.}$$