3. Linjärt beroende, Baser, Dimension.

Detta avsnitt behandlar begreppen linjärt beroende/oberoende, bas och dimension. Avsikten är att på ett snabbt sätt introducera dessa begrepp och ge lämpliga referenser i studieboken (Anton & Rorres: Elementary Linear Algebra) för självstudier.

Vi börjar med rummet $\mathbb{R}^n$ där n är ett positivt heltal.

Definition 3.1. (linjärkombination) Låt $\mathbf{u}$ samt $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Om $\mathbf{u}$ kan representeras genom

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k$$

där $a_1, \ldots, a_k$ är reella tal säger vi att vektorn $\mathbf{u}$ är en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Vi ger några exempel i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$, se i boken sid. 234 och 235.

Exempel 3.1. Vektorn $\mathbf{u} = (1, 2)$ är en linjärkombination av $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$ och $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$ genom

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2.$$

Här är $a_1 = 1$ och $a_2 = 2$.

Samma vektor $\mathbf{u} = (1, 2)$ är också linjärkombination av $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ och $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ genom $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Här är dock $a_1 = 1$ och $a_2 = 1$.

Exempel 3.2 Vektorn $\mathbf{u} = (2, 1)$ är en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 1)$ genom

$$\mathbf{u} = 4\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3.$$

Låt oss nu definiera linjärt beroende/oberoende (se sidan 241 i boken).

Definition 3.2. (linjärt beroende) Vektorerna $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ i $\mathbb{R}^n$ sägs vara *linjärt beroende* om det finns tal $a_1, \ldots, a_k$ *ej alla* 0 sådana att

$$a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0};$$

annars linjärt oberoende.

Med andra ord om det enda sättet att få en linjärkombination

$$a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k$$

att bli lika med noll är att ha $a_1 = \cdots = a_k = 0$ så är vektorerna $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ linjärt oberoende.

Denna definition ger direkt att om två vektorer är parallella så är de linjärt beroende. Också två vektorer i planet är linjärt beroende om och endast om de är parallella.

Exempel 3.3. Vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1)$, $\mathbf{u}_3 = (3,1)$ är linjärt beroende eftersom

$$3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}.$$

Exempel 3.4. Låt $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vara vektorer i ett vektorrum som har följande samband

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_1.$$

Då är dessa vektorer linjärt beroende. Detta framgår klart genom en omskrivning av ovanstående

$$2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Generellt för att bestämma om en mängd givna vektorer $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ är linjärt beroende/oberoende så måste man lösa ett ekvationssystem. Nämligen

$$a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}.$$

Vi exemplifierar detta i tre dimensioner.

Exempel 3.5. Låt $\mathbf{u}_1 = (1,0,2)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,2,1)$, och $\mathbf{u}_3 = (-3,4,0)$. För att bestämma om dessa vektorer är linjärt beroende/oberoende bildar vi linjärkombinationen

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0},$$

dvs

$$a_1(1,0,2) + a_2(-1,2,1) + a_3(-3,4,0) = (0,0,0).$$

Detta leder till

$$(a_1 - a_2 - 3a_3, 2a_2 + 4a_3, 2a_1 + a_2) = (0,0,0),$$

som i sin tur bildar ekvationssystemet

$$\begin{cases} a_1 - a_2 - 3a_3 & = 0 \\ 2a_2 + 4a_3 & = 0 \\ 2a_1 + a_2 & = 0. \end{cases}$$

Om nu systemet ovan har en icke-trivial lösning $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$ så är vektorerna $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ linjärt beroende annars linjärt oberoende.

Ett alternativt sätt att se det hela är genom en omskrivning av systemet på matrisform:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi vet (sats 2.3.6 sidan 109 i boken) att ekvationssystemet har icke-triviala lösningar om och endast om matrisen till vänster har en determinant som är noll, dvs om och endast om

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Vilket faktiskt är fallet i detta exempel.

Observera att denna metod att använda determinanter gäller enbart om du har n stycken vektorer i $\mathbb{R}^n$. Enbart då kan du få en kvadratisk matris där determinanten har någon mening.

Anmärkning: Om du har k stycken vektorer i $\mathbb{R}^n$ och du vill bestämma linjärt beroende/oberoende, så bör du göra på följande sätt:

(1) Om $k > n$ så kan du med gott samvete påstå att vektorerna är linjärt beroende. (Se sats 5.3.3 sidan 245.)

(2) Om $k = n$ så kan du undersöka determinanten för den matris vars kolumner är de givna vektorerna. Vektorerna är linjärt beroende om och endast om determinanten för den nämnda matrisen är noll.

(3) Om $k < n$ så har du inget annat val än att lösa ekvationssystemet som du bildar enligt ovan, se Exempel 3.5. Vektorerna blir linjärt beroende om och endast om ekvationssystemet har icke triviala lösningar.

Se vidare i avsnitt 5.3 i boken.

För att definiera begreppet bas behöver vi följande definition.

Definition 3.3. (linjärt hölje) Låt $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ vara en mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$. Mängden av alla möjliga linjärkombinationer

$$\{a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k\}$$

kallas det *linjära höljet* till S och betecknas

$$\operatorname{span}(S).$$

Se sidan 236.

Exempel 3.6. Linjära höljet av vektorerna (1, 0, 0) och (0, 1, 0) i $\mathbb{R}^3$ är det horisontella planet $\{(a_1, a_2, 0);\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, dvs (x, y)-planet som det brukar kallas.

Observera nu att med hjälp av vektorerna i mängden $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ kan vi *nå* alla andra vektorer i $\operatorname{span}(S)$.

Vi fortsätter nu med att definiera begreppet bas. I planet och i rummet är det enkelt att illustrera detta begrepp. I planet (två dimensioner) behöver vi minst två *icke-parallella* vektorer för att via linjärkombinationer av dessa "nå" varje vektor. Om vi har tre vektorer i planet sådana att minst två av dem är icke-parallella ser vi lätt att en av dessa är onödig.

Definition 3.4. (bas) En mängd vektorer $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ i $\mathbb{R}^n$ sägs vara (utgöra) en bas för $\mathbb{R}^n$ om

(1) S är en linjärt oberoende mängd,
(2) $\text{span}(S) = \mathbb{R}^n$.

Se avsnitt 5.4 i boken.

Villkor (1) kräver att mängden S inte innehåller "onödiga" vektorer. Till exempel mängden

$$S = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$$

bildar ingen bas i $\mathbf{R}^2$ då summan av de två första vektorerna är lika med den tredje. Alltså är S linjärt beroende och därför ingen bas enligt definitionen.

Observera att om vi sätter $S_1 = \{(1,0), (0,1)\}$ så har vi

$$\text{span}(S) = \text{span}(S_1).$$

Villkor (2) kräver att vi ska kunna "nå" alla andra vektorer med hjälp av mängden S, dvs att varje vektor i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna i S.

Visa nu att *två icke parallella vektorer i* $\mathbb{R}^2$ *alltid bildar en bas i* $\mathbb{R}^2$.

Man kan visa att varje bas i $\mathbf{R}^n$ innehåller n stycken vektorer.

Definition 3.5. (dimension) Dimensionen för ett vektorrum är antalet baselement.

Speciellt följer det att dimensionen för $\mathbb{R}^n$ är lika med n.

Exempel 3.7. Låt $\mathbf{u}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,1,2)$ och bestäm en vektor $\mathbf{u}_3$ sådan att mängden $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ bildar en bas för $\mathbb{R}^3$.

Lösning. Enligt definition 3.4 krävs att mängden S är linjärt oberoende samt att $\text{span}(S) = \mathbb{R}^3$. Låt $\mathbf{u}_3 = (a,b,c)$. Då har vi enligt (2) i anmärkningen på sidan 3 att mängden är linjärt oberoende om och endast om

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 2 & c \end{pmatrix} = c - a - 3b \neq 0.$$

Välj $a = 1$, $b = 1$ och $c - 1 - 3 =\neq 0$, dvs $c \neq 4$. Låt oss välja $c = 1$ också. Således är vektorn $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 1)$ och därmed blir mängden S linjärt oberoende. Av sats 5.4.5 i boken följer då att S är en bas i $\mathbf{R}^3$. Alternativt räcker det enligt samma sats att visa att S spänner $\mathbf{R}^3$. Det kan visas genom att för varje $\mathbf{u} = (x, y, z)$ hitta $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ sådan att

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{u}.$$

Detta löser man genom att man hittar inversen till matrisen här kallad A och sedan fås

$$\mathbf{a} = A^{-1}\mathbf{u}.$$

Vi rekommenderar övningar i boken. Följande övningsuppgifter rekommenderas i första hand.

Avsnitt 5.2: 7, 8, 11, 14–19.
Avsnitt 5.3: 2, 3, 5–13, 15, 16.
Avsnitt 5.4: 2, 3, 7, 21, 22, 23.