Institutionen för matematik, KTH
Mattias Dahl, Henrik Eriksson

5B1104, Differential- och integralkalkyl I, del 1, för TIMEH2
Tentamen, lördag 12 mars 2005 kl 14.00–19.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är formelsamlingen Beta. För betyg tre krävs minst 15 poäng på A-delen. För fyra eller femma ska man dessutom ha minst 9 resp. minst 15 poäng på B-delen. Under kursen har sju kontrollskrivningar/hemuppgifter givits, godkänt på någon av dessa räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen.

Skrivning	KS1	HU1	KS2	HU2	KS3	HU3	KS4
Uppgift	1	2	3	4	5	6	7

DEL A

(3p) **1.** Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^3}{x-x^{17}}.$$

Lösning. *Detta är ett obestämt gränsvärde av typen* $\frac{0}{0}$*, vi kan använda l'Hospitals regel:*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^3}{x-x^{17}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-3x^2}{1-17x^{16}}=\frac{1-3}{1-17}=\frac{1}{8}.$$

(3p) **2.** Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan

$$x^2+xy+2y^2=4$$

i punkten $(1,1)$.

Lösning. *Vi deriverar kurvans ekvation med avseende på* x *och får*

$$2x+y+xy'+4yy'=0.$$

I punkten $(x,y)=(1,1)$ *ger detta*

$$2+1+y'+4y'=0$$

eller $y'=-\frac{3}{5}$*. Tangentlinjen är den linje som går igenom* $(1,1)$ *och har lutning* $-\frac{3}{5}$*, alltså linjen*

$$y=-\frac{3}{5}(x-1)+1.$$

(3p) **3.** Bestäm största värdet för uttrycket

$$f(x)=\frac{e^{1+\sqrt{x}}}{e^x}.$$

Lösning. *Funktionen*

$$f(x)=\frac{e^{1+\sqrt{x}}}{e^x}=e^{1+\sqrt{x}-x}$$

är definierad för $x \geq 0$*. Vid* $x = 0$ *har vi* $f(0) = e$ *och* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{1+\sqrt{x}-x} = 0$ *eftersom* $1 + \sqrt{x} - x \to -\infty$ *då* $x \to \infty$*. Om* $f(x)$ *antar större värden än dessa så måste det ske i någon lokal max-punkt. I en sådan punkt är* $f'(x) = 0$*, dvs*

$$0 = f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) e^{1+\sqrt{x}-x}.$$

Denna ekvation är uppfylld för $x = \frac{1}{4}$*. I denna punkt har funktionen värdet*

$$f(1/4) = e^{1+1/2-1/4} = e^{5/4},$$

vi ser att detta är det största värdet som f(x) antar.

(3p) **4.** Beräkna integralen

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}.$$

Lösning. *Vi gör substitutionen* $t = \sqrt{x}$*,* $x = t^2$*,* $dx = 2tdt$*, och får*

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x} &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2} 2t\,dt \\
&= 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2}\,dt \\
&= 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\,dt \\
&= 2\left[t - \arctan t\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= 2\left(\sqrt{3} - \arctan\sqrt{3}\right) \\
&= 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(3p) **5.** En rotationsyta uppstår då kurvan $y = \frac{1}{3}x^3$, $1 \leq x \leq 2$, roterar kring x-axeln. Beräkna dess area.

Lösning. *Eftersom* $y(x) > 0$ *så ges arean av*

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^2 2\pi y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_1^2 x^3\sqrt{1+x^4}\,dx.
\end{aligned}$$

Vi gör variabelbytet $t = 1 + x^4$*,* $dt = 4x^3dx$*, vilket ger*

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2\pi}{3}\int_2^{17} \sqrt{t}\,\frac{1}{4}dt \\
&= \frac{\pi}{6}\int_2^{17} \sqrt{t}\,dt \\
&= \frac{\pi}{6}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_2^{17} \\
&= \frac{\pi}{9}\left(17^{3/2} - 2^{3/2}\right).
\end{aligned}$$

(3p) **6.** Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y' - \frac{2y}{x} = x$$

som uppfyller $y(1) = 3$.

Lösning. *Vi multiplicerar med den integrerande faktorn*

$$e^{\int \left(-\frac{2}{x}\right) dx} = e^{-2 \ln x} = x^{-2}$$

vilket ger ekvationen

$$x^{-2} y' - 2x^{-3} y = x^{-1}.$$

Nu är vänsterledet derivatan av en produkt,

$$\left(x^{-2} y\right)' = x^{-1}.$$

Vi integrerar detta och får

$$x^{-2} y = \ln x + C,$$

eller

$$y = x^2 \left(\ln x + C\right).$$

Då $y(1) = 3$ *måste vi sätta* $C = 3$*. Den sökta lösningen är*

$$y = x^2 \left(\ln x + 3\right).$$

(3p) **7.** Bestäm värdet av sjuttonde derivatan i origo för funktionen

$$f(x) = x^{10} \tan x.$$

Ledning: Använd MacLaurin och Beta.

Lösning. *Sjuttonde derivatan i origo,* $f^{(17)}(0)$*, dyker upp framför* x^{17} *i MacLaurin-utvecklingen av* $f(x)$*. Vi bestämmer denna utveckling. Enligt Beta, avsnitt 8.6, är*

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + O(x^9)$$

så

$$f(x) = x^{10} \tan x = x^{11} + \frac{1}{3}x^{13} + \frac{2}{15}x^{15} + \frac{17}{315}x^{17} + O(x^{19}).$$

Koefficienten framför x^{17} *är* $\frac{1}{17!} f^{(17)}(0)$*, så*

$$\frac{1}{17!} f^{(17)}(0) = \frac{17}{315}$$

och alltså är

$$f^{(17)}(0) = \frac{17}{315} \cdot 17!.$$

(3p) **8.** Bestäm den antiderivata (primitiva funktion) $F(x)$ till

$$f(x) = \frac{3-x}{(x+1)(x^2+1)}$$

som uppfyller $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$.

Lösning. *För att hitta antiderivatan gör vi en partialbråksuppdelning,*

$$f(x) = \frac{3-x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

vilket ger

$$f(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

Detta uttryck har primitiv funktion

$$\begin{aligned} F(x) &= 2\ln(x+1) - \ln(x^2+1) + \arctan x + C \\ &= \ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\right) + \arctan x + C. \end{aligned}$$

Gränsvärdet då $x \to \infty$ blir

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \ln(1) + \frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{2} + C,$$

för att detta ska bli noll måste vi sätta $C = -\frac{\pi}{2}$. Den sökta antiderivatan är

$$F(x) = \ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\right) + \arctan x - \frac{\pi}{2}.$$

DEL B

(5p) **9.** Beräkna värdet av följande generaliserade integral eller visa att den är divergent.

$$\int_0^\infty e^{-3x}\sqrt{17-e^{-2x}}\,dx$$

Lösning. *Vi gör variabelbytet $t = e^{-x}$, $dt = -e^{-x}dx$. Då $x \to \infty$ så $t \to 0$ och*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-3x}\sqrt{17-e^{-2x}}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-3x}\sqrt{17-e^{-2x}}\,dx \\ &= \lim_{a\to 0}\int_a^1 t^2\sqrt{17-t^2}\,dt. \end{aligned}$$

Eftersom integranden $f(t) = t^2\sqrt{17-t^2}$ är kontinuerlig på intervallet $[0,1]$ så ges den generaliserade integralen av

$$\int_0^\infty e^{-3x}\sqrt{17-e^{-2x}}\,dx = \int_0^1 t^2\sqrt{17-t^2}\,dt,$$

dvs. av integralen av en kontinuerlig funktion över ett slutet och begränsat intervall. Den generaliserade integralen är alltså konvergent. Vi kan beräkna dess värde genom att slå upp primitiva funktionen i Beta (avsnitt 7.4, formel 143):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-3x}\sqrt{17-e^{-2x}}\,dx &= \int_0^1 t^2\sqrt{17-t^2}\,dt \\ &= \left[-\frac{t}{4}\left(17-t^2\right)^{3/2} + \frac{17t}{8}\sqrt{17-t^2} + \frac{17^2}{8}\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{17}}\right)\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4}(17-1)^{3/2} + \frac{17}{8}\sqrt{17-1} + \frac{17^2}{8}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \\ &= \frac{17^2}{8}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

(5p) **10.** Bestäm linjäriseringen av $f(x) = \arcsin x$ vid $x = 0.5$ och använd denna för att hitta ett närmevärde till $\arcsin(0.4)$. Ungefär hur stort är felet i detta närmevärde?

Lösning. *Vi har* $f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, *så linjäriseringen* $L(x)$ *vid* $x = 1/2$ *ges av*

$$\begin{aligned} L(x) &= f(1/2) + f'(1/2)(x - 1/2) \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x - 1/2). \end{aligned}$$

Detta ger en approximation

$$f(0.4) = \arcsin(0.4) \approx L(0.4) = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}(0.4 - 0.5) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{5\sqrt{3}}.$$

Felet i denna approximation ges av

$$E(0.4) = f(0.4) - L(0.4) = f''(X)\frac{(0.4-0.5)^2}{2} = f''(X)\frac{1}{200}$$

där X *är något tal mellan* 0.4 *och* 0.4. *Andraderivatan ges av*

$$f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

vilket är en växande funktion på intervallet $[0.4, 0.5]$. *Största möjliga värde för feluttrycket fås alltså vid* $X = 0.5$ *och vi har*

$$0 \le E(0.4) \le f''(0.5) \cdot \frac{1}{200} = \frac{1}{200} \cdot \frac{1/2}{(1-1/4)^{3/2}} = \frac{1}{150\sqrt{3}}.$$

Eftersom $\sqrt{3} > 1.7$ *så ger detta feluppskattningen*

$$0 \le E(0.4) \le \frac{1}{150\sqrt{3}} < \frac{1}{150 \cdot 1.7} = \frac{1}{225} < \frac{1}{200} = \frac{5}{1000} = 0.005.$$

(5p) **11.** Beräkna längden av kurvan

$$y(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos t}\, dt$$

mellan $x = -\frac{\pi}{2}$ och $x = \frac{\pi}{2}$.

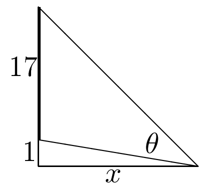
Lösning. *Funktionen* $y(x)$ *har derivata* $y'(x) = \sqrt{\cos x}$. *Längden av funktionsgrafen ges av*

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x}\, dx. \end{aligned}$$

Eftersom $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ *så är detta samma som*

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 \frac{x}{2}}\, dx \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos \frac{x}{2}\right| dx \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2}\, dx \\ &= \sqrt{2} \left[2 \sin \frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4. \end{aligned}$$

(5p) **12.** Karnevalens 17 meter höga väggreklam har underkanten en meter över ögonhöjd. Hur långt ifrån bilden ska man stå för att den ska uppta maximal synvinkel?



Lösning. *Vinkeln i den stora yttre triangeln ges av* $\arctan\left(\frac{18}{x}\right)$ *och vinkeln i den smala undre triangeln ges av* $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. *Synvinkeln* θ *ges alltså av*

$$\theta(x) = \arctan\left(\frac{18}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

för $x > 0$. *Vi ska bestämma det största värdet som* θ *kan anta. Eftersom* $\theta(x)$ *är deriverbar för alla* $x > 0$, $\theta(x) > 0$ *och*

$$\lim_{x\to 0} \theta(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \theta(x) = 0 - 0 = 0$$

så antar $\theta(x)$ *sitt maxvärde i någon punkt där* $\theta'(x) = 0$, *dvs i någon punkt* x *där*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{1+\left(\frac{18}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{18}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{18}{x^2+18^2} \\ &= \frac{17(18-x^2)}{(x^2+1)(x^2+18^2)}. \end{aligned}$$

Det enda $x > 0$ *som uppfyller denna ekvation är* $x = \sqrt{18}$, *vilket alltså är det avstånd där synvinkeln är maximal.*