

**5B1104, Differential- och integralkalkyl I, del 1, för TIMEH2**

**Tentamen, tisdag 29 mars 2005 kl 14.00–19.00.**

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är formelsamlingen Beta. För betyg tre krävs minst 15 poäng på A-delen. För fyra eller femma ska man dessutom ha minst 9 resp. minst 15 poäng på B-delen. Under kursen har sju kontrollskrivningar/hemuppgifter givits, godkänt på någon av dessa räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen.

Skrivning	KS1	HU1	KS2	HU2	KS3	HU3	KS4
Uppgift	1	2	3	4	5	6	7

**DEL A**

- (3p) 1. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^{-2} - 3x^2}{4x^2 - 5x^{-2}}.$$

- (3p) 2. Bestäm de punkter på kurvan

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = 5$$

där tangentlinjen är horisontell.

- (3p) 3. Antar funktionen

$$f(x) = \arctan 3x - \arctan x$$

värdet  $1/2$ ?

- (3p) 4. Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2} dt, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

- (3p) 5. Området mellan  $x$ -axeln och kurvan  $y = xe^{-x}$ ,  $0 \leq x \leq 4$ , roterar ett varv kring  $x$ -axeln. Beräkna volymen av den rotations kropp som uppstår.

- (3p) 6. Bestäm alla funktioner  $y = f(x)$  som uppfyller differentialekvationen

$$y' = \sqrt{y}(x^3 - 2x + 1).$$

- (3p) 7. Bestäm koefficienten framför  $x^5$  i Taylorutvecklingen av

$$f(x) = \arccos x \cos x$$

vid  $x = 0$ .

- (3p) 8. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{3x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

## DEL B

(5p) **9.** Ett rep av längd 10 m används för att gör en cirkel och en kvadrat. Vilken är den största resp. minsta sammanlagda area dessa kan ha?

(5p) **10.** Visa att

$$\arctan(1/x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

för alla  $x > 0$ .

(5p) **11.** Visa att funktionen

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1,$$

är inverterbar. Vilken är definitionsmängden för inversfunktionen  $f^{-1}(x)$ ? Beräkna inversfunktionens derivata i punkten  $\ln(\sqrt{2} + 1)$ .

(5p) **12.** En kil tillverkas av en cylindrisk trädstam med radie 10 cm på följande sätt. Först kapas stammen med ett snitt med  $45^\circ$  vinkel mot centralaxeln. Därefter kapas en kil bestående av de översta  $h$  cm ( $0 \leq h \leq 20$ ) med ett snitt vinkelrätt mot centralaxeln. Beräkna volymen av kilen.