Institutionen för matematik, KTH
Henrik Eriksson, Mattias Dahl

5B1104 för D1 och TIMEH2, Differential- och integralkalkyl I, del 1. (Gäller också utgångna kursen 5B1124 för L och V.) Tentamen, onsdag 24 augusti 2005 kl 14.00–19.00. KORTFATTADE LÖSNINGAR

DEL A

(3p) **1.** Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^{-2}-3x}{2x\ \arctan x^2}.$$

Lösning. När vi skriver om uttrycket som

$$\frac{2x^{-2}-3x}{2x\cdot\arctan x^2} = \frac{2x^{-2}-3x}{2x}\cdot\frac{1}{\arctan x^2} = \frac{2x^{-3}-3}{2}\cdot\frac{1}{\arctan x^2}$$

ser vi att gränsvärdet blir

$$\frac{0-3}{2}\,\frac{1}{\pi/2} = -\frac{3}{\pi}.$$

(3p) **2.** Bestäm de punkter på ellipsen

$$2x^2+2xy+y^2=5$$

där tangentlinjen är vertikal.

Lösning. Implicit derivering ger tangentlutningen i varje punkt.

$$0=(5)'=(2x^2+2xy+y^2)'=4x+2y+2xy'+2yy' \ \Rightarrow y' = -\frac{4x+2y}{2x+2y}$$

Tangentlinjen blir vertikal i de punkter där nämnaren är noll, dvs där $y=-x$. Insatt i ellipsens ekvation ger detta punkterna $(x,y)=(-\sqrt{5},\sqrt{5})$ och $(x,y)=(\sqrt{5},-\sqrt{5})$.

(3p) **3.** Bestäm största och minsta värdet för uttrycket

$$f(x)=1-\sin x+\sin^2 x \qquad .$$

Lösning. Funktionen $f(x)$ är deriverbar och periodisk, alltså finns max och min i punkter där $f'(x)=0$. Detta ger

$$0=(1-\sin x+\sin^2 x)' = -\cos x+2\sin x\cos x = \cos x(-1+2\sin x)$$

Vilket är uppfyllt då $x=\pm\pi/2+2n\pi$ eller $x=\pi/6+2n\pi$ eller $x=5\pi/6+2n\pi$. För dessa x-värden tar funktionen värdena $f(\pi/2)=1$, $f(-\pi/2)=3$, $f(\pi/6)=f(5\pi/6)=3/4$. Funktionens max är alltså 3 och dess min är 3/4.

(3p) **4.** Beräkna följande integral och avgör om värdet är större än 25.

$$\int_1^7 \frac{1+x+x^2}{1+x}\,dx$$

Lösning.

$$\begin{aligned}\int_1^7 \frac{1+x+x^2}{1+x}\,dx &= \int_1^7 \frac{1}{1+x}+x\,dx \\ &= \Big[\ln(1+x)+x^2/2\Big]_1^7 \\ &= (\ln 8+49/2)-(\ln 2+1/2) \\ &= \ln 4+24.\end{aligned}$$

Eftersom $4 > e$ så är integralens värde större än 25.

(3p) **5.** Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området mellan parablerna $y = x^2$ och $y = 2 - x^2$ roterar kring x-axeln.

Lösning. Parablerna skär varandra vid $x = \pm 1$. Volymen av rotationskroppen är

$$\int_{-1}^1 \pi(2-x^2)^2\,dx - \int_{-1}^1 \pi(x^2)^2\,dx = 4\pi\int_{-1}^1 1-x^2\,dx = 16\pi/3.$$

(3p) **6.** Bestäm Maclaurinpolynomet (dvs Taylorpolynomet kring $x = 0$) av grad 2 till funktionen

$$f(x) = \sqrt{4+x} \qquad .$$

Sätt in $x = 0.08$ och kontrollera att det ger ett bra närmevärde till $\sqrt{4.08} = 2.01990098767242\ldots$.

Lösning. I Beta hittar vi att $\sqrt{1+t} = 1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+O(t^3)$. Alltså är

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{4+x} \\ &= \sqrt{4}\sqrt{1+(x/4)} \\ &= 2\left(1+\frac{1}{2}(x/4)-\frac{1}{8}(x/4)^2+O(x^3)\right) \\ &= 2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+O(x^3).\end{aligned}$$

Om vi sätter in $x = 0.008$ och struntar i resttermen $O(x^3)$ får vi

$$2+\frac{1}{4}0.08-\frac{1}{64}(0.08)^2 = 2+0.02-0.001 = 2.019.$$

(3p) **7.** Vilken lösning till följande differentialekvation har $y(0) = y'(0) = -1$?

$$y''-y = 2\cos x$$

Lösning. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y''-y = 0$ är $y_h(x) = Ae^x+Be^{-x}$. Eftersom högerledet $2\cos x$ ej är en lösning till den homogena ekvationen så hittar vi en partikulärlösning som är en linjärkombination av $\cos x$ och $\sin x$, nämligen $y_p(x) = -\cos x$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen är alltså

$$y(x) = Ae^x+Be^{-x}-\cos x$$

och den lösning som uppfyller $y(0) = y'(0) = -1$ har $A = -1/2$ och $B = 1/2$.

(3p) **8.** Visa att följande generaliserade integral är konvergent

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx.$$

Lösning. Integralen är generaliserad vid $x = 0$ och vid $x = \infty$. Integranden är en positiv funktion. För $0 \le x \le 1$ har vi $\arctan x \le x$ så

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

och detta är en konvergent integral. För $1 \le x < \infty$ är $\arctan x < \pi/2$ och

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx \le \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$$

vilket också är en konvergent integral.

(5p) **9.** Beräkna kortaste avståndet mellan kurvorna $y = e^x$ och $y = \ln x$.
Ledning: Vilken riktning har kortaste sammanbindningslinjen?

Lösning. Eftersom funktionerna $y = e^x$ och $y = \ln x$ är varandras inverser (och alltså har grafer som är varandras spegelbilder i linjen $y = x$) så måste den kortaste sammanbindningslinjen vara parallell med linjen $y = -x$. Punkten (x, e^x) ligger på kurvan $y = e^x$ och dess närmaste punkt på kurvan $y = \ln x$ är (e^x, x). Avståndet mellan dessa punkter är

$$d(x) = \sqrt{(x - e^x)^2 + (e^x - x)^2} = \sqrt{2}|e^x - x| = \sqrt{2}(e^x - x).$$

Det minsta värdet för $d(x)$ fås då $d'(x) = 0$, dvs då $x = 0$. Kortaste avståndet mellan kurvorna är $d(0) = \sqrt{2}$.

(5p) **10.** Bestäm arean av den buktiga yta som bildas när kurvstycket

$$2y = e^x + e^{-x}\ ,\ \ 0 \le x \le 1$$

roterar kring x-axeln.
Ledning: En jämn kvadrat uppstår under ett rottecken.

Lösning. Arean ges av

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 2\pi y\sqrt{1 + (y')^2}\,dx \\
&= \pi\int_0^1 (e^x + e^{-x})\sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^1 (e^x + e^{-x})\sqrt{4 + (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^1 (e^x + e^{-x})\sqrt{(e^x + e^{-x})^2}\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^1 (e^x + e^{-x})^2\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{2x} + 2 + e^{-2x}\,dx \\
&= \frac{\pi}{4}(e^2 + 4 - e^{-2}).
\end{aligned}$$

(5p) **11.** För vilka x konvergerar följande potensserie?

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{1+\sqrt{n}2^n}$$

Lösning. Detta är en potensserie kring $x = 0$ med positiva koefficienter $a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}\,2^n}$. Dess konvergensradie R ges av

$$\begin{aligned}
1/R &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n+1}\,2^{n+1}}}{\frac{1}{1+\sqrt{n}\,2^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{n}\,2^n}{1+\sqrt{n+1}\,2^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1/2}\,2^{-n}+1}{n^{-1/2}\,2^{-n}+2\sqrt{1+1/n}} \\
&= \frac{0+1}{0+2\sqrt{1+0}} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Vi drar slutsatsen att serien konvergerar för $|x| < 2$ och divergerar för $|x| > 2$. För $x = 2$ får vi serien

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{1+\sqrt{n}2^n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{-n}+\sqrt{n}}$$

som divergerar eftersom den har termer av samma storleksordning som $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$. För $x = -2$ får vi serien

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1+\sqrt{n}2^n} = \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(-2)^{-n}+\sqrt{n}}.$$

Detta är en alternerande serie vars termer går mot noll, och alltså är den konvergent.

(5p) **12.** Bevisa olikheten

$$\left|\arctan x - \frac{1}{1+x^2}\right| < \frac{\pi}{2}$$

Lösning. Vi studerar funktionen $f(x) = \arctan x - \frac{1}{1+x^2}$ som är definierad och deriverbar för alla x. Dess derivata är

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2}\cdot 2x = \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^2.$$

Eftersom $f'(x) > 0$ för alla x utom $x = -1$ så är f en strikt växande funktion. Vi studerar dess gränsvärden då $x \to \pm\infty$;

$$\lim_{x\to\infty} \arctan x - \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

och

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{\pi}{2} - 0 = -\frac{\pi}{2}.$$

Vi drar slutsatsen att $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$ vilket är detsamma som $|f(x)| < \frac{\pi}{2}$.