Lösningsförslag till tentamen i 5B1104 den 11/03 2006

1. Vi har

$$\lim = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)}{x\sqrt{1+\frac{\cos x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1+\frac{\sin x}{x}}{\sqrt{1+\frac{\cos x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}} = \frac{-1+0}{\sqrt{1+0+0}} = -1.$$

2. Vi tillämpar implicit derivering. Ekvationen skrivs om som

$$x^3+y(x)^3 = xy(x)^2+x^2y(x)+3.$$

Sedan vi deriverar både leden:

$$3x^2+3y^2y' = y^2+x\cdot 2yy'+2xy+x^2y'$$

och uttrycker y':

$$y' = \frac{y^2+2xy-3x^2}{3y^2-2xy-x^2}.$$

I punkt $(1,2)$ får vi $y'=5/7$. Tangentlinjen då har ekvationen

$$y-2 = \frac{5}{7}(x-1)$$

eller

$$y = \frac{5}{7}x+\frac{9}{7}.$$

3. Vi har

$$y(x) = 3x^{-1/2}-x^{-3/2}.$$

Derivatan blir

$$y' = -\frac{3}{2}x^{-3/2}+\frac{3}{2}x^{-5/2} = \frac{3}{2}x^{-5/2}(1-x).$$

Vi ser att $y'<0$ för $x>1$ och $y'>0$ för $0<x<1$. Det betyder att $y(x)$ är växande på intervallet $(0,1)$ och den är avtagande på intervallet $(1,+\infty)$. Punkten $x=1$ blir då lokal maximum punkt och $y(1)=2$. Vi kollar också gränserna:

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x\sqrt{x}}(-1+3x) = -\infty$$

och

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

Alltså funktionen antar alla värdena mellan $-\infty$ och 2 på intervallet $(0,1)$ och den antar alla värdena mellan 0 och 2 på intervallet $(1,\infty)$. Hela värdemängden blir intervallet $(-\infty,2]$.

4. Det kortaste vägen är att införa en ny variabel $u=\sqrt{e^x+1}$. Då $x=\ln(u^2-1)$ och $dx=\frac{2u}{u^2-1}du$. Integralen blir efter bytet av variabel

$$\int \frac{1}{u}\cdot\frac{2u}{u^2-1}du = \int\frac{2du}{u^2-1} = \int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du = \ln(u-1)-\ln(u+1) = \ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right).$$

Alltså, svaret är

$$\ln\left(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right).$$

5. Enligt formel för rotationsvolym kring x-axel,

$$V=\pi\int_0^1 y(x)^2dx=\pi\int_0^1\left(x^2+2x\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right)dx=\pi\int_0^1 1\,dx+\pi\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx=$$

$$=\pi+\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx^2=\pi-\pi\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^1=\pi-\frac{2\pi}{3}(0-1)=\frac{5\pi}{3}.$$

6. Taylorpolynomet ges av formel

$$P(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2.$$

Vi har $f(1)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$;

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\qquad\text{och}\quad f'(1)=\frac{1}{2};$$

och

$$f''(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\qquad\text{och}\quad f''(1)=-\frac{1}{2}.$$

Taylorpolynomet blir

$$P(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2.$$

7. Vi löser först den homogena ekvationen $y''-2y'+y=0$. Det karakteristiska polynomet är $r^2-2r+1=(r-1)^2$ som har dubbelrot $r=1$. Detta innebär att homogena lösningar är $y_1(x)=e^x$ och $y_2(x)=xe^x$. Den allmänna homogena lösningen blir

$$y_h(x)=C_1e^x+C_2xe^x.$$

Vi söker nu någon partikulär lösning till ekvationen i form

$$y_p(x)=a\cos x+b\sin x.$$

Insättningen till ekvationen ger

$$2a\sin x-2b\cos x=\cos x$$

vilket ger $a=0$ och $b=-1/2$. Alltså, $y_p(x)=-\sin x/2$ och den allmänna lösningen är

$$y(x)=-\frac{1}{2}\sin x+C_1e^x+C_2xe^x.$$

För att bestämma konstanter C_1 och C_2 sätter vi begynnelsevillkor. Villkor $y(0)=0$ ger oss $C_1=0$ och villkor $y'(0)=0$ ger oss $C_2=1/2$. Svaret blir

$$y(x)=-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}xe^x.$$

8. Vi har

$$\int = \int_1^{+\infty} \ln x \, d\left(-\frac{1}{x+2}\right) = -\left.\frac{\ln x}{x+2}\right|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{d\ln x}{x+2} = -\left.\frac{\ln x}{x+2}\right|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+2)} =$$

$$= -\left.\frac{\ln x}{x+2}\right|_1^{+\infty} + \int_1^{\infty} \left(\frac{1/2}{x} - \frac{1/2}{x+2}\right) dx =$$

$$= -\left.\frac{\ln x}{x+2}\right|_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\ln\left.\left(\frac{x}{x+2}\right)\right|_1^{+\infty} = -\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x+2} + 0 + \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+2}\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

9. Vi skriver om termer i serien:

$$a_n = \frac{n^2 - n + a(n^2-1) + n^2 + n}{n(n^2-1)} = \frac{(a+2)n^2 - a}{n^3 - n} = \frac{n^2(a+2-\frac{a}{n^2})}{n^3(1-\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{n}\cdot\frac{a+2-\frac{a}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}.$$

Om $a+2 \neq 0$ d v s $a \neq -2$, då seriens termer har samma beteendet för stora n som termerna $\frac{a+2}{n}$ och eftersom serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a+2}{n} = (a+2)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

divergerar (det är harmoniska serien), vi avgör att vår ursprungliga serien divergerar också för $a \neq -2$. Om $a = -2$, då termerna har samma beteendet som $2/n^3$ och eftersom serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^3}$$

konvergerar, ursprungliga serien konvergerar också för $a = -2$.

För att beräkna summan för $a = -2$, skriver vi om termer:

$$a_n = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n(n+1)}.$$

Vi räknar sedan partiella summor:

$$S_2 = a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6};$$

$$S_3 = a_2 + a_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12};$$

$$S_4 = a_2 + a_3 + a_4 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{20}; \qquad \text{o s v ...}$$

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}.$$

Hela summan blir

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

10. Vi bestämmer först ekvation av tangentlinje till kurvan i någon godtycklig punkt $x = a$. Ekvationen är

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

vilket ger

$$y = \frac{1}{a^2+1} - \frac{2a}{(a^2+1)^2}(x-a).$$

Skärningspunkt med y-axeln motsvarar till värde $x = 0$ i denna ekvation. Vi får då

$$b = y(0) = \frac{1}{a^2+1} + \frac{2a^2}{(a^2+1)^2} = \frac{3a^2+1}{(a^2+1)^2}.$$

Problemet nu är att bestämma det största värdet av funktionen

$$g(a) = \frac{3a^2+1}{(a^2+1)^2}$$

där a kan vara godtyckligt reellt tal.

Vi har

$$g'(a) = \frac{2a(1-3a^2)}{(a^2+1)^3},$$

och $g'(a) = 0$ i punkter $a = 0$ eller $a = \pm 1/\sqrt{3}$. Dessutom

$$\lim_{a\to\pm\infty} g(a) = \lim_{a\to\pm\infty} \frac{\frac{3}{a^2}+\frac{1}{a^4}}{\left(1+\frac{1}{a^2}\right)^2} = 0.$$

Vi har

$$g(0) = 1; \qquad g(\pm 1/\sqrt{3}) = \frac{9}{8}$$

och vi avgör att det största värdet är 9/8.

11. Vi har

$$f(x) = \frac{\left(\sin x^3\right)^{1/3}}{x} = \frac{\left(x^3 - \frac{x^9}{6} + \dots\right)^{1/3}}{x} = \frac{x\left(1 - \frac{x^6}{6} + \dots\right)^{1/3}}{x} = \left(1 \underbrace{-\frac{x^6}{6} + \dots}_{u}\right)^{1/3},$$

där punkter står för termer av högre ordning. Vi ser ur denna formel att $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ vilket ger oss värdet $f(0) = 1$ som garanterar att funktionen blir kontinuerlig i origo (funktionen är kontinuerlig i alla andra punkter eftersom den är given av elementär formel väldefinierad för $x \neq 0$).

För att bestämma den sjätte derivatan använder vi oss av binomialformel

$$(1+u)^{1/3} = 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + \dots, \qquad \text{där} \quad u = -\frac{x^6}{6} + \dots.$$

Vi får

$$f(x) = 1 - \frac{x^6}{18} + \dots.$$

På andra sidan, enligt MacLaurins formel

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + \dots.$$

Jämförelse ger oss

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = -\frac{1}{18}$$

och vi får slutligen

$$f^{(6)}(0) = -40.$$

12. Enligt formel för arean av buktiga rotationsytan,

$$A = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

Vi har

$$y'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$$

och

$$1 + y'(x)^2 = 1 + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2} = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2} = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2.$$

Dettta ger oss

$$A = 2\pi \int_0^1 x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) dx = 2\pi \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{4\pi}{3}.$$