

5B1104, Differential- och integralkalkyl I, del 1.
Tentamen, lördagen den 11 mars 2006 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta.

För betyg tre krävs minst 15 poäng på A-delen. För fyra eller femma ska man dessutom ha minst 9 resp minst 15 poäng på B-delen. Under kursen har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Följande tabell gäller:

Skrivning	KS1	HS1	KS2	HS2	KS3	HS3	KS4
Uppgift	1	2	3	4	8	5	6

DEL A

- (3p) 1. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - x}{\sqrt{x^2 + \cos x} - 1}.$$

- (3p) 2. Bestäm ekvationen för tangentlinjen till kurvan

$$x^3 + y^3 = xy^2 + x^2y + 3$$

i punkt $(1, 2)$.

- (3p) 3. Bestäm värdemängden (range) till funktionen

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

- (3p) 4. Beräkna integralen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$$

- (3p) 5. Området

$$0 \leq y \leq x + \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

roterar ett varv kring x -axel. Bestäm volymen av erhållen rotationskropp.

- (3p) 6. Ange Taylorpolynom av grad 2 kring punkten $x = 1$ till funktionen

$$f(x) = \arctan x.$$

- (3p) 7. Bestäm funktionen $y(x)$ som uppfyller differentialekvationen

$$y'' - 2y' + y = \cos x$$

tillsammans med begynnelsevillkor $y(0) = y'(0) = 0$.

(3p) 8. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+2)^2} dx.$$

DEL B

(5p) 9. Bestäm den reela konstanten a så att serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{a}{n} + \frac{1}{n-1} \right)$$

konvergerar. Bestäm sedan seriens summa för detta värde på a .

(5p) 10. En tangent till kurvan

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

skär y -axeln i punkten $(0, b)$. Bestäm det största värde b kan anta.

(5p) 11. Funktionen $f(x)$ definieras som

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{\sin x^3}}{x}$$

för $x \neq 0$. Definiera $f(0)$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig på hela reela axeln. Bestäm sedan den sjätte derivatan $f^{(6)}(0)$ för den erhållna kontinuerliga funktionen. (Ledning: använd MacLaurin utvecklingar).

(5p) 12. Kurvstycket

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x, \quad 0 < x \leq 1$$

roterar ett varv kring y -axel. Bestäm arean av den erhållna buktiga ytan. (OBS: arean är ändlig oavsett att kurvan är obegränsad).