Lösningsförslag till tentamen i 5B1104 den 2/06 2006

1. För att f blir kontinuerlig i punkt $x = 1$ krävs att $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$. Vi har

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{4x}}{x-1} = /\text{ L'Hospitals regel }/ = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1} = -\frac{1}{2}.$$

Alltså, $f(1) = -1/2$.

2. Vi söker lutningen av tangentlinjen till kurvan i någon punkt (x_0, y_0) genom implicit derivering. Vi har kurvans ekvation

$$x^2 + xy(x) + y(x)^2 = 1.$$

Deriveringen ger

$$2x + y(x) + xy'(x) + 2y(x)y'(x) = 0$$

vilket ger

$$y'(x_0) = -\frac{2x_0 + y_0}{x_0 + 2y_0}.$$

Lutningen blir 1 om $y' = 1$ d v s $y_0 + 2x_0 = -(x_0 + 2y_0)$ eller $y_0 = -x_0$. Insättning av detta till kurvans ekvation ger $x_0^2 = 1$ eller $x_0 = \pm 1$. Alltså vi får två punkter: $(1, -1)$ och $(-1, 1)$.

3. Vi deriverar först funktionen:

$$f'(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x-4}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2x-2+x-4}{2\sqrt{x-1}}.$$

Derivatan blir 0 om $x = 2$. Dessutom, den finns inte i randpunkt $x = 1$. Vi kollar värdena av f i kritiska punkten $x = 2$ och randpunkter $x = 1$ och $x = 5$:

$$f(1) = 0; \qquad f(2) = -2; \qquad f(5) = 2.$$

Alltså , $\min f = -2$ och $\max f = 2$.

4. Vi har

$$\int_0^1 \frac{3x\,dx}{\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x+1} = t \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(3t^2-3)\cdot 2t\,dt}{t} = 6\int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)\,dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}.$$

5. Vi bestämmer först allmän antiderivatan. Det första steget är partielbråkuppdelningen:

$$\frac{x-1}{x(x^2+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Vi har då

$$\int \frac{x-1}{x^2+1} = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = -\ln x + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \arctan x =$$

$$= -\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \arctan x + C.$$

Det sista uttrycket har gränsvärdet $\frac{\pi}{2} + C$ då $x \to +\infty$. Vi avgör att $C = -\frac{\pi}{2}$ och

$$F(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \arctan x - \frac{\pi}{2}.$$

6. Rotationsvolymen ges av formel

$$V = \pi \int_0^1 y(x)^2\,dx = \pi \int_0^1 x^2 \ln(x+1)\,dx = \pi \int_0^1 \ln(x+1)\,d\left(\frac{x^3}{3}\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{x^3}{3}\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{3(x+1)}\right) = /y = x+1/ = \pi\frac{\ln 2}{3} - \frac{\pi}{3}\int_1^2 \frac{y^3 - 3y^2 + 3y - 1}{y}\,dy =$$

$$= \pi\frac{\ln 2}{3} - \frac{\pi}{3}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{3}{2}y^2 + 3y - \ln y\right)\Big|_1^2 = \frac{2\pi\ln 2}{3} - \frac{5\pi}{18}.$$

7. Vi har

$$\lim = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^3)) - 2(x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^6))}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 - \frac{4}{3}x^5 + o(x^5) - 2x^3 + o(x^5)}{x^5} = -\frac{4}{3}.$$

8. Vi börjar med homogena lösningen till ekvationen

$$y'' + 4y = 0.$$

Den karakteristiska ekvationen är

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

som har två komplexa rötter $\lambda = \pm 2i$. Motsvarande lösningar är $y_1 = \cos 2x$ och $y_2 = \sin 2x$ och vi får den homogena lösningen

$$y_h(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Nu söker vi partikulär lösning i form

$$y_p(x) = Ax + B.$$

Insättningen till elvationen ger $A = 5/4$ och $B = 1/4$. Alltså,

$$y(x) = \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} + C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

9. Vi betraktar funktionen $g(x) = \ln(x+2) - \ln x + \frac{x}{4}$ på intervallet $(0, +\infty)$. Det räcker att visa att den har minimal värdet $\ln 2 + \frac{1}{2}$ på intervallet. Vi observerar först att

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+}\left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \frac{x}{4}\right) = +\infty$$

och analogt $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Vidare,

$$g'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{4} = \frac{(x-2)(x+4)}{4x(x+2)}.$$

Derivatan blir noll i punkt $x = 2$ och den är negativ på intervallet $(0, 2)$ och positiv på intervallet $(2, +\infty)$. Det visar att $g(x)$ är avtagande på intervallet $(0, 2)$ och växande på intervallet $(2, +\infty)$ och således den har minimumpunkt $x = 2$. Eftersom $g(2) = \ln 2 + \frac{1}{2}$, vi får önskad olikhet.

10. Vi avgör först att $y = f(x)$ är definierad för $x \in (0, 2)$.

Att rotera kurvan kring linjen $x = 1$ innebär att vi flyttar y-axel till linjen $x = 1$. Detta innebär att vi byter variabel: istället av variabel x vi har nya variabeln $t = x - 1$ d v s $x = t + 1$. Vi får då rotationskropp som uppstår när functionen $g(t) = f(t + 1) = t\sqrt{1 - t^2}$, där $t \in (-1, 1)$ roterar ett varv kring nya y-axeln. Eftersom $g(-t) = -g(t)$, rotationskropp består av två lika delar, den som stämmer till $t \in (-1, 0)$ och annan som stämmer till $t \in (0, 1)$. Vi får då

$$V = 2 \cdot 2\pi \int_0^1 t \cdot g(t)\, dt = 4\pi \int_0^1 t^2 \sqrt{1 - t^2}\, dt = /t = \sin u/ = 4\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2(u) \cdot \cos^2(u)\, du =$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 2u\, du = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4u}{2}\, du = \frac{\pi^2}{4}.$$

11. Låt r beteckna cylinders radie och $2h$ beteckna dess höjd. Då vi har enligt Pyphagorus sats

$$r^2 + h^2 = R^2.$$

På andra sidan, cylinders volym är

$$V = \pi r^2 \cdot 2h = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Vi skall nu undersöka funktionen $V(r) = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$ på intervallet $r \in [0, R]$. Vi har $V(r) = 0$ på gränserna $r = 0$ och $r = R$. Dessutom,

$$V'(r) = 2\pi \left(\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^2}{2\sqrt{R^2 - r^2}} \right) \cdot 2r,$$

och $V' = 0$ för $r^2 = \frac{2}{3} R^2$. Detta värde ger maximalt värde av $V(r)$ och vi får

$$V_{\max} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

12. Vi har

$$a_n = \ln \left(\frac{3^n + n^b}{3^n - n^b} \right) = \ln \left(1 + \frac{n^b}{3^n} \right) - \ln \left(1 - \frac{n^b}{3^n} \right).$$

Eftersom

$$\ln(1 + x) = x + o(x) \qquad \text{for} \qquad x \to 0,$$

och

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{3^n} = 0,$$

vi får

$$a_n = \frac{2n^b}{3^n} + o(n^b/3^n)$$

och det gäller att

$$0 \leq a_n \leq 2 \cdot \frac{2n^b}{3^n}$$

för tillräckligt stora n. Vidare, $2n^b < 2^n$ för tillräckligt stora n och vi får

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Eftersom den geometriska serien

$$\sum_n \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

konvergerar, vi får att ursprungliga serien konvergerar också.