Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

5B1104, Differential- och integralkalkyl I, del 1.
Tentamen, fredagen den 2 juni 2006 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta.

För betyg tre krävs minst 15 poäng på A-delen. För fyra eller femma ska man dessutom ha minst 9 resp minst 15 poäng på B-delen. Under kursen har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Följande tabell gäller:

Skrivning	KS1	HS1	KS2	HS2	KS3	HS3	KS4
Uppgift	1	2	3	4	8	5	6

DEL A

(3p) **1.** Funktionen $f(x)$ definieras som

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{4x}}{x-1}$$

för positiva $x \neq 1$. Definiera $f(1)$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig i punkt $x = 1$.

(3p) **2.** Bestäm de punkter på kurvan $x^2 + xy + y^2 = 1$ där tangentlinjen är parallel med linjen $y = x$ (d v s den har lutningen $k = 1$).

(3p) **3.** Bestäm det största odh det minsta värde som antas av funktionen

$$f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$$

då $1 \leq x \leq 5$.

(3p) **4.** Beräkna integralen

$$\int_0^1 \frac{3x\,dx}{\sqrt{x+1}}.$$

(3p) **5.** Bestäm den antiderivata (den primitiva funktionen) $F(x)$ till funktionen

$$f(x) = \frac{x-1}{x(x^2+1)}$$

som uppfyller $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

(3p) **6.** Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då området definierad av

$$0 \leq y \leq x\sqrt{\ln(x+1)}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

roterar omkring x-axel.

(3p) **7.** Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin 2x - 2\ln(1+x^3)}{x^5}.$$

(Ledning: använd MacLaurins utvecklingar).

VÄND!

(3p) **8.** Lös differentialekvationen

$$y'' + 4y = 5x + 1.$$

DEL B

(5p) **9.** Visa att

$$\ln(x+2) - \ln x + \frac{x}{4} \geq \ln 2 + \frac{1}{2}$$

för $x > 0$.

(5p) **10.** Beräkna volynem av den kropp som uppstår då området som begränsas av x-axeln och kurvan $y = (x-1)\sqrt{2x - x^2}$ roterar ett varv kring linjen $x = 1$.

(5p) **11.** Bestäm den största volym, som en cylinder inskriven i en sfär med radien R kan anta.

(5p) **12.** Visa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{3^n + n^b}{3^n - n^b}\right)$$

konvergerar för alla reela värden b.