Lösningsförslag till tentamen 07 mars 2007

1. Enligt formel, funktionen är kontinuerlig och deriverbar på hela reella axel utan punkten $x = 1$. För att funktionen var kontinuerlig i punkten $x = 1$ det krävs att $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$. Vi har

$$f(1) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = 2 \qquad \text{och} \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x) = 1 + b + c.$$

Vi får första villkor

$$1 + b + c = 2.$$

För att functionen var deriverbar i punkten $x = 1$ det krävs att den är kontinuerlig och har samma vänster och höger derivator där. Vi har

$$f'(1-0) = \lim_{x\to 1-0} (2x + b) = 2 + b \qquad \text{och} \qquad f'(1+0) = 1.$$

Detta ger oss andra villkor

$$1 = b + 2.$$

Vi löser systemet för b och c och vi får $b = -1$, $c = 2$.

2. Lutningen av normallinjen är $k = -1/y'(x_0)$ där $y'(x_0)$ är derivatan av funktionen $y(x)$ given av implicit formel. Implicit deriveringen av ekvationen ger oss

$$2y'(x) = 2xy^3(x) + 3x^2y^2(x)y'(x).$$

Vi får

$$y'(x) = \frac{2xy^3}{2 - 3x^2y^2}.$$

I punkten $(1, 1)$ får vi $y'(1) = -2$ vilket ger oss lutningen $k = 1/2$. Ekvationen för normallinjen blir

$$y - 1 = (x - 1)/2$$

eller

$$y = x/2 + 1/2.$$

3. Vi deriverar funktionen:

$$y'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x = x^2(3 + x)e^x.$$

Formeln visar att derivatan är positiv för $x > -3$ och den är negativ för $x < -3$ d v s funktionen är avtagande på intervallet $(-\infty, -3)$ och växande på intervallet $(-3, \infty)$. Då är punkten $x = -3$ en global minimum punkt för funktionen och $f(-3) = -27/e^3$. Sedan, vi räknar

$$\lim_{x\to -\infty} x^3e^x = \lim_{t\to +\infty} \left(-\frac{t^3}{e^t}\right) = 0; \qquad \text{och} \qquad \lim_{x\to +\infty} x^3e^x = +\infty.$$

Detta visar att funktionen antar alla värdena mellan $-27/e^3$ (inklusivt) och $+\infty$.

4. Efter byte av variabel $x = t^2$ integralen blir

$$\int = \int \ln(1+t)d(t^2) = \big[\text{partiell integration}\big] = t^2\ln(1+t) - \int t^2\, d\ln(1+t) = t^2\ln(1+t) - \int \frac{t^2}{1+t}\, dt =$$

$$= \big[\text{polynomdivision}\big] = t^2\ln(1+t) - \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right) dt = t^2\ln(1+t) - \frac{t^2}{2} + t - \ln(1+t) =$$

$$= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x}).$$

5. Vi börjar med att bestämma MacLaurinsutvecklingar av $\sin x$ och $1/\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{-1/2}$. Vi har

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7);$$

Enligt binomialformel

$$(1+t)^{-1/2} = 1 - t/2 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)t^2 + O(t^3)$$

med $t = -x^2$ får vi

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + x^2/2 + \frac{3}{8}x^4 + O(x^6).$$

Äntligen,

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right)\cdot\left(1 + x^2/2 + \frac{3}{8}x^4 + O(x^6)\right) =$$

$$= x + x^3\cdot\left(1\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cdot 1\right) + x^5\cdot\left(1\cdot\frac{3}{8} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{120}\cdot 1\right) = x + x^3/3 + 3x^5/10.$$

6. Volymen är

$$V = 2\pi\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cdot\cos(x^2)\, dx = \pi\int_0^{\sqrt{\pi/2}}\cos(x^2)\, d(x^2) = \big[x^2 = t\big] = \pi\int_0^{\pi/2}\cos t\, dt = \pi\sin t|_0^{\pi/2} = \pi.$$

7. Vi tillämpar kvotkriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left((n+1)^3 + 3^{n+1}\right)x^{n+1}}{(n^3+3^n)x^n} = x\cdot\frac{3^{n+1}\left(\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} + 1\right)}{3^n\left(\frac{n^3}{3^n} + 1\right)} = 3x\cdot\frac{1 + \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{1 + \frac{n^3}{3^n}}.$$

Sista bråket i uttrycket går mot 1 då $n \to \infty$ och vi får

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3x.$$

Enligt kvotkriterium serien konvergerar då $|3x| < 1$ d v s då $|x| < 1/3$ och divergerar då $|3x| > 1$. Detta ger oss konvergensradie $R = 1/3$. OBS: man behöver inte i denna uppgift undersöka beteendet an serien för $x = \pm 1/3$ där kvotkriterium ger inget svar.

8. Det är en linjär ekvation. Integrerande faktorn till den är

$$\mu(x) = \exp\left(\int\frac{x}{x^2+1}\, dx\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{x^2+1}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right) = \sqrt{x^2+1}.$$

Efter multiplication med den ekvationen blir

$$\sqrt{x^2+1}y'(x) + \frac{xy}{\sqrt{x^2+1}} = x^2+1$$

eller

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\,y(x)\right) = x^2+1.$$

Efter integrering får vi

$$\sqrt{x^2+1}y(x) = \frac{x^3}{3} + x + C$$

och

$$y(x) = \frac{x^3/3 + x + C}{\sqrt{x^2+1}}.$$

9. Biljetintäckterna blir $f(x) = xN(x) = \frac{16\,000\,000\,x}{(x+100)^{3/2}}$ förutsatt att alla villiga åskådare kan köpa biljetter d v s om $N(x)$ är mindre eller lika än antal av biljetter = antal av platser. Om konserten hålls i Globen får vi olikhet

$$\frac{16\,000\,000}{(x+100)^{3/2}} \leq 16000$$

som ger oss $(x+100)^{3/2} \geq 1\,000$ eller $x \geq 0$. Detta visar att i fallet med Globen alla villiga åskådare kan köpa biljetter oavsett av biljettpris och man skall maximisera funktionen

$$f(x) = \frac{16\,000\,000\,x}{(x+100)^{3/2}}$$

definierad för $x \geq 0$. Derivatan är

$$f'(x) = 16\,000\,000\frac{100 - x/2}{(x+100)^{5/2}}.$$

Den är negativ då $x > 200$ och positiv då $0 \leq x < 200$ vilket visar att $f(x)$ har global maximum punkt i $x = 200$. Alltså, svar i delsfrågan (a) är $x = 200$Kr.

Nu antar att konserten hålls i Konserthuset som tar maximalt 2 000 åskådare. Då alla villiga kan köpa biljetter om

$$\frac{16\,000\,000}{(x+100)^{3/2}} \leq 2000$$

vilket ger oss $(x+100)^{3/2} \geq 8\,000$ eller $x \geq 300$. Om $x < 300$, då antal av disponibla biljetter (d v s 2 000) är mindre än antal av villiga åskådare och då alla 2 000 biljetter blir sålda och total summa av intäckterna blir $2\,000x$. Alltså, vi får följande formel för intäckterna:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{16\,000\,000\,x}{(x+100)^{3/2}}, \text{ om } x \geq 300; \\ 2\,000x, \text{ om } 0 \leq x < 300 \end{cases}$$

Vi ser att andra raden ger oss en växande funktion. Den första raden är en avtagande funktion enligt tidigare undersökningen m h a derivatan. Hela funktionen $f(x)$ blir då växande på intervallet $[0, 300)$ och avtagande på intervallet $[300, \infty)$ vilket visar att $x = 300$ är en global maximum punkt. Det är svar i delsfrågan (b).

10. Längden av kurvan ges av formeln

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx.$$

Enligt integralkalkylenshuvudsats, $y'(x) = \sqrt{x^4 - 1}$ och vi får

$$\sqrt{1 + y'(x)^2} = \sqrt{x^4} = x^2.$$

Längden blir då

$$L = \int_1^2 x^2 \, dx = \frac{7}{3}.$$

11. Integralen har två singuljära punkter som skall undersökas: ∞ och 0. Så vi delar upp den i två integraler:

$$\int_0^\infty \cdots = \int_0^1 \cdots + \int_1^\infty \cdots \, .$$

I den första av dem den avgörande termen i parentes då $x \to 0$ är $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (den går mot oändligheten medan den andra termen är begränsad). Hela uttrycket då kan ersättas med enklare uttryck

$$\frac{x^a}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2-a}}.$$

Integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2-a}}$$

är en standard integral och den konvergerar om $1/2 - a < 1$ d v s om $a > -1/2$.

I den andra integralen skall vi undersöka uttrycket då $x \to \infty$. Efter en liten transformation får vi för uttrycket i parentes

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} =$$

$$= \left[\text{multiplication med } \sqrt{x} + \sqrt{x+1}\ \right] = \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x(x+1)} \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)} \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)}.$$

För stora $x \to \infty$ kan man ersätta $\sqrt{x+1}$ med $\sqrt{x}$ på alla plats i sista uttryck (en noggran motivering av detta går genom att bryta ut $\sqrt{x}$ i alla plats där $\sqrt{x+1}$ inträffar) och vi får enklare uttryck

$$\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

Integralen blir då

$$\int_1^\infty \frac{dx}{2x^{3/2-a}}$$

som konvergerar för $3/2 - a > 1$ d v s $a < 1/2$.

Hela ursprungliga integralen konvergerar då för a i intervallet $(-1/2, 1/2)$.

12. Vi har

$$\lim = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{(\sin x - x)(\sin x + x)}{x^2 \sin^2 x} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) - x\right)\left(x + O(x^3) + x\right)}{x^2\left(x + O(x^3)\right)^2} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{-\frac{x^3}{6}\left(1 + O(x^2)\right) \cdot 2x\left(1 + O(x^2)\right)}{x^2 \cdot x^2\left(1 + O(x^2)\right)^2} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{(1 + O(x^2))(1 + O(x^2))}{(1 + O(x^2))^2} \right) = -\frac{1}{3}.$$