

**5B1104, Differential- och integralkalkyl I, del 1.**  
**Tentamen, onsdagen den 7 mars 2007 kl 8.00–13.00.**

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta.

För betyg tre krävs minst 15 poäng på A-delen. För fyra eller femma ska man dessutom ha minst 9 resp minst 15 poäng på B-delen. Under kursen har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Följande tabell gäller:

Skrivning	HS1	KS1	HS2	KS2	HS3	KS3	KS4
Uppgift	1	2	3	4	6	7	8

**DEL A**

- (3p) 1. Funktionen  $f(x)$  definieras som

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & \text{om } x < 1; \\ x + 1, & \text{om } x \geq 1. \end{cases}$$

Bestäm konstanterna  $b$  och  $c$  så att funktionen blir kontinuerlig och deriverbar på hela reella axeln.

- (3p) 2. Bestäm ekvationen för den linjen som är normal till kurvan

$$2y = x^2y^3 + 1$$

i punkten  $(1, 1)$ .

- (3p) 3. Bestäm värdemängden (range) till funktionen

$$y = x^3e^x$$

definierad på hela reella axeln.

- (3p) 4. Räkna ut integralen

$$\int \ln(1 + \sqrt{x}) dx.$$

- (3p) 5. Ange MacLaurinspolynom (d v s Taylorpolynom) kring  $x = 0$  av grad 5 till funktionen

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

- (3p) 6. Området begränsat av  $x$ -axeln och kurvan  $y = \cos(x^2)$ , där  $|x| \leq \sqrt{\pi/2}$  roterar kring  $y$ -axeln. Bestäm volymen av erhållen kropp.

- (3p) 7. Bestäm konvergensradie till potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^3 + 3^n) x^n.$$

(3p) 8. Lös differentialekvationen

$$y' + \frac{xy}{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1}.$$

### DEL B

9. Inför en rockkonsert gör arrangörerna följande bedömning angående publiktillströmningen:

Om biljettpriset är  $x$  Kr då blir antalet åskådare villiga att köpa biljetter lika med

$$N(x) = \frac{16\,000\,000}{(x + 100)^{3/2}}.$$

(2p) (a) Vilket biljettpris bör man ta för att maximera biljettintäkterna om konserten hålls i Globen som tar maximalt 16 000 åskådare?

(3p) (b) Samma frågan men nu hålls konserten i Konserthuset som tar maximalt 2 000 åskådare.

(5p) 10. Beräkna längden av kurvan

$$y(x) = \int_1^x \sqrt{t^4 - 1} dt$$

mellan  $x = 1$  och  $x = 2$ .

(5p) 11. För vilka värden på parameter  $a$  konvergerar integralen

$$\int_0^\infty x^a \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx?$$

(5p) 12. Räkna ut gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right).$$