Lösningsförslag till tentamen i 5B1104 den 31 maj 2007

1. Vi har

$$\lim = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{\sin(x^2)}{x^2}}}{x\left(1-\frac{\arctan x}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-0-0}}{1-0} = 1.$$

2. Implicit deriveringen av ekvationen ger

$$2yy' - y - xy' + 2x = 0$$

varav

$$y'(x) = \frac{y-2x}{2y-x}.$$

Tangentlinjen är horisontal i punkter där $y' = 0$ d v s $y = 2x$. Insättning av detta till kurvans ekvation ger $3x^2 = 3$ varav $x = \pm 1$ och $y = \pm 2$.

Svar: punkterna är $(1, 2)$ och $(-1, -2)$.

3. Vi deriverar först funktionen:

$$f'(x) = x^2 - 2 + \frac{2}{x^2+1} = \frac{x^2(x^2-1)}{x^2+1}.$$

Från denna formel ser man att f' är icke-positiv i intervallet $[-1, 1]$ där f är avtagande och f' är icke-negativ i intervaller $(-\infty, -1]$ och $[1, \infty)$ där f är växande. Detta visar att punkten $x = -1$ är lokal maximumpunkt och $x = 1$ är lokal minimumpunkt. Sista kritiska punkten $x = 0$ är ingen extrempunkt.

4. Vi börjar med partiellbråkuppdelning:

$$\frac{x+1}{(x-1)(4x^2+1)} = \frac{\frac{2}{5}}{x-1} + \frac{-\frac{8}{5}x - \frac{3}{5}}{4x^2+1}.$$

Därefter integrerar vi partiella bråk och vi får den antiderivatan

$$F(x) = \frac{2}{5}\ln(x-1) - \frac{1}{5}\ln(4x^2+1) - \frac{3}{10}\arctan 2x + C.$$

För att bestämma konstanten C skall man räkna ut $\lim_{x\to\infty} F(x)$. Vi har

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}\ln\frac{x-1}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{3}{10}\arctan 2x + C\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}\ln\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}} - \frac{3}{10}\cdot\frac{\pi}{2} + C\right) = \frac{2}{5}\ln\frac{1}{2} - \frac{3\pi}{20} + C.$$

Vi avgör att

$$C = \frac{2}{5}\ln 2 + \frac{3\pi}{20}.$$

Svar:

$$F(x) = \frac{2}{5}\ln(x-1) - \frac{1}{5}\ln(4x^2+1) - \frac{3}{10}\arctan 2x + \frac{2}{5}\ln 2 + \frac{3\pi}{20}.$$

5. Vi har

$$\int_0^{\ln 6} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x+3}} = \left[e^x = t;\ dt = e^x\,dx\right] = \int_1^6 \frac{dt}{\sqrt{t+3}} = 2\sqrt{t+3}\Big|_1^6 = 2.$$

6. Om V_1 är rotationsvolym som motsvarar till rotation av kurvan $y = \cos x$ och V_2 är rotationsvolym som motsvarar till rotation av linjen $y = 1/2$, då $V = V_1 - V_2$. Vi får

$$V = \pi \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2 x\, dx - \pi \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{4}\, dx = \pi \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4} \right) dx =$$

$$= \pi \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x \right) dx = \frac{\pi}{4} \left(x + \sin 2x \right) \Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} = \pi \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

7. Vi använder oss av standarda MacLaurinsutvecklingar för $\cos x$ och $\ln(1+x)$ och vi får

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots \right) \cdot \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \dots \right) = x^2 + x^4 \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + x^6 \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) + \dots$$

Enligt MacLaurinsformula multipliceras x^6 med koefficient $f^{(6)}(0)/6!$. Vi får alltså

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{5}{8}$$

vilket ger

$$f^{(6)}(0) = 6! \cdot \frac{5}{8} = 450.$$

8. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r + 1 = 0$ eller $(r+1)^2 = 0$. Den har en dubbelrot $r = -1$. Den motsvarar till allmänna lösningen $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$. Insättning av begynnelsevillkor ger oss

$$y(0) = C_1 = 1; \qquad y'(0) = C_2 - C_1 = 0$$

vilket ger $C_1 = C_2 = 1$.

Svar: $y(x) = (x+1)e^{-x}$.

9. Låt $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Då $f'(x) = x - \sin x$. Enlight standarda olikheten $|\sin x| \leq |x|$ som gäller för alla x, ser man att $f' \geq 0$ för positiva x och $f' \leq 0$ för negativa x. Detta visar att f är växande för positiva x och den är avtagande för negativa x och då f har globala minimum punkten i $x = 0$. Då $f(x) \geq f(0) = 0$ för alla reella x och detta ger oss olikheten.

10. Vi bestämmer först antiderivatan till funktionen.

$$F(x) = \int \frac{\ln x\, dx}{(x+1)^3} = \int \ln x\, d\left(-\frac{1}{2(x+1)^2} \right) = -\frac{\ln x}{2(x+1)^2} + \int \frac{d \ln x}{2(x+1)^2} =$$

$$= -\frac{\ln x}{2(x+1)^2} + \int \frac{dx}{2x(x+1)^2} = -\frac{\ln x}{2(x+1)^2} + \int \left(\frac{1/2}{x} - \frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{(x+1)^2} \right) dx =$$

$$= -\frac{\ln x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2(x+1)}.$$

Enlight definition av generaliserade integral

$$\int_0^\infty \frac{\ln x\, dx}{(x+1)^3} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ A \to \infty}} \int_\varepsilon^A \frac{\ln x\, dx}{(x+1)^3} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ A \to \infty}} \left(F(A) - F(\varepsilon) \right) = \lim_{A \to \infty} F(A) - \lim_{\varepsilon \to 0} F(\varepsilon).$$

Vi har

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\ln \varepsilon}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{(\varepsilon+1)^2} \right) - \frac{1}{2}\ln(\varepsilon+1) + \frac{1}{2(\varepsilon+1)} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \varepsilon}{2} \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon+2)}{(\varepsilon+1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

eftersom $\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\cdot\ln\varepsilon)=0$ enlight standarda gränsvärdena.

Därefter,

$$\lim_{A\to\infty} F(A)=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{\ln A}{2(A+1)^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{A}{A+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{A+1}\right)=0$$

eftersom

$$\lim_{A\to\infty}\frac{\ln A}{2(A+1)^2}=0$$

enlight standarda gränsvärdena och

$$\lim_{A\to\infty}\frac{A}{A+1}=1.$$

Svar: $-\frac{1}{2}$.

11. Vi undersöker seriens termer:

$$a_n=\sqrt{n^a+\frac{1}{n^a}}-n^{a/2}=n^{a/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^{2a}}}-1\right)=$$

$$=n^{a/2}\left(\left(1+\frac{1}{n^{2a}}\right)^{1/2}-1\right)=n^{a/2}\left(1+\frac{1}{2n^{2a}}+\cdots-1\right)=\frac{n^{a/2}}{2n^{2a}}+\ldots$$

där ... står för termer av högre ordningen. Serien har samma konvergence/divergence som annan serien med termerna $b_n=n^{a/2}/2n^{2a}$ eftersom $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$. Men

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3a/2}}$$

och den serien konvergerar om $3a/2>1$ d v s $a>2/3$.

Svar: serien konvergerar för $a>2/3$.

12. Vi undersöker funktionen

$$f(x)=x^4+x^3+x.$$

Vi har $f'(x)=4x^3+3x^2+1$ och vi hittar roten $x=-1$ direkt vilket ger oss

$$f'(x)=(x+1)(4x^2-x+1).$$

Eftersom $4x^2-x+1$ är positiv för alla reella x, avgör vi att $f'(x)>0$ i intervallet $(-\infty,-1)$ och $f'(x)<0$ i intervallet $(-1,\infty)$. Dessutom får vi att $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$. Dessa egenskaper av $f(x)$ visar att ekvationen $f(x)=a$ har två olika rötter om $a>f(-1)=-1$.