

**5B1104, Differential- och integralkalkyl I, del 1.**  
**Tentamen, torsdagen den 31 maj 2007 kl 8.00–13.00.**

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta.

För betyg tre krävs minst 15 poäng på A-delen. För fyra eller femma ska man dessutom ha minst 9 resp minst 15 poäng på B-delen. Under kursen har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Följande tabell gäller:

Skrivning	HS1	KS1	HS2	KS2	HS3	KS3	KS4
Uppgift	1	2	3	4	6	7	8

**DEL A**

- (3p) 1. Räkna ut gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x - \sin(x^2)}}{x - \arctan x}.$$

- (3p) 2. Bestäm de punkter på ellipsen

$$x^2 - xy + y^2 = 3$$

där tangentlinjen är horisontal.

- (3p) 3. Bestäm de lokala extrempunkterna till funktionen

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + 2 \arctan x$$

och avgör deras karaktär.

- (3p) 4. Bestäm den antiderivata (den primitiva funktionen)  $F(x)$  till funktionen

$$f(x) = \frac{x + 1}{(x - 1)(4x^2 + 1)}$$

som uppfyller

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0.$$

- (3p) 5. Räkna ut integralen

$$\int_0^{\ln 6} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 3}}.$$

- (3p) 6. Området mellan kurvorna  $y = \cos x$  och  $y = 1/2$ , där  $-\pi/3 \leq x \leq \pi/3$  roterar kring  $x$ -axeln. Bestäm volymen av erhållen kropp.

- (3p) 7. Bestäm  $f^{(6)}(0)$ , där

$$f(x) = \cos(x) \cdot \ln(1 + x^2).$$

Ledning: använd MacLaurinutvecklingar.

**VÄND!**

(3p) 8. Lös differentialekvationen

$$y'' + 2y' + y = 0$$

tillsammans med begynnelsevillkor  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

### DEL B

(5p) 9. Bevisa olikheten

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

för alla reella  $x$ .

(5p) 10. Visa att generaliserade integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^3} dx$$

konvergerar och bestäm dess värde. Ledning: bestäm först antiderivatn till funktionen.

(5p) 11. För vilka värden på parameter  $a$  konvergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{n^a + \frac{1}{n^a}} - n^{a/2} \right) \quad ?$$

(5p) 12. För vilka värden på parametern  $a$  har ekvationen

$$x^4 + x^3 + x = a$$

två olika reella rötter?