SF1600, lösningsförslag till tentamen 15 mars 2008

1. $f(x)$ blir kontinuerlig om $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$. Eftersom $x \to 0$ och $\arctan 1/x^2$ är begränsad ($|\arctan t| < \pi/2$ för alla reella x), får vi att

$$\lim_{x\to 0}\left(x \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 0.$$

Alltså, man skall definiera $f(0) = 0$.

Nu räknar vi derivatan i origo. Enligt definition,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{t\to+\infty}\arctan t = \frac{\pi}{2}.$$

2. Ekvation för tangentlinjen är $y - y_0 = k(x - x_0)$ där $k = y'(0)$. Eftersom tangenten går genom origo, $x_0 = y_0 = 0$. Derivatan $y'(0)$ räknas m h av implicit derivering. Vi skriver om kurvans ekvation som

$$y(x) = 2\sin(x + y(x))$$

och deriverar den med avseende på x:

$$y'(x) = 2\cos(x + y(x)) \cdot (1 + y'(x)).$$

Nu löser vi ut $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{2\cos(x+y)}{1 - 2\cos(x+y)}.$$

I origo där $x = y = 0$ får vi $y'(0) = -2$.

Ekvation för tangentlinjen är $y = -2x$.

3. Vi räknar först derivatan:

$$f'(x) = 2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Derivatan är 0 om

$$2x = \sqrt{x^2+1}$$

vilket ger oss den kritiska punkten $x = 1/\sqrt{3}$. Nu räknar vi värdena av funktionen i randpunkter samt i den erhållna kritiska punkten. Vi får

$$f(0) = 2; \qquad f(1/\sqrt{3}) = \sqrt{3}; \qquad f(3) = 2\sqrt{10} - 3 > 2\sqrt{9} - 3 = 3 > 2 > \sqrt{3}.$$

Alltså, det största värdet blir $f(3) = 2\sqrt{10} - 3$ och det minsta värdet blir $f(1/\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

4. Vi har

$$\int = \int \frac{e^x \cdot d\left(e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^2} = \left[\ e^x = t\ \right] = \int \frac{t\,dt}{(t+1)^2} =$$

$$= \left[\text{partiellbråkuppdelning}\right] = \int\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\right)dt = \ln(t+1) + \frac{1}{t+1} + C = \ln\left(e^x+1\right) + \frac{1}{e^x+1} + C.$$

5. Vi använder oss av MacLaurinsutvecklingar. Vi har

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^8) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^6)$$

(vi behöver inte termer av ordning högre än 6). Därefter,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$$

och multiplicationen ger oss

$$\frac{\cos(x^2)}{1+x^2} = \left(1 - \frac{x^4}{2} + o(x^6)\right)\left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)\right) =$$
$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6) - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2} - \frac{x^8}{2} + o(x^8) = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + o(x^6).$$

Enligt MacLaurinsformel, koefficient inför x^6 ges som $f^{(6)}(0)/6!$. Vi får alltså

$$-\frac{1}{2} = \frac{f^{(6)}(0)}{6!}$$

vilket ger

$$f^{(6)}(0) = -\frac{6!}{2} = -360.$$

6. Längden ges av formeln

$$l = \int_1^4 \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

Vi räknar först

$$\sqrt{1+y'(x)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{1 + \frac{x}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x}} = \sqrt{\frac{x}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x}} = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Längden blir då

$$l = \int_1^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3} + x^{1/2}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} - 1 = \frac{10}{3}.$$

7. Vi börjar med att beräkna antiderivatan:

$$\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\, dx = [\text{ partiellbråkuppdelning }] =$$
$$= \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \frac{-2}{x+3}\right) dx = -\ln|x+1| + 3\ln|x+2| - 2\ln|x+3| = \ln\left|\frac{(x+2)^3}{(x+1)(x+3)^2}\right|.$$

Generaliserade integralen räknas då så här:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\, dx = \ln\left|\frac{(x+2)^3}{(x+1)(x+3)^2}\right|\Bigg|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{(x+2)^3}{(x+1)(x+3)^2}\right| - \ln\left(\frac{8}{9}\right) =$$
$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{(1+2/x)^3}{(1+1/x)(1+3/x)^2}\right) - \ln\left(\frac{8}{9}\right) = \ln 1 - \ln\left(\frac{8}{9}\right) = \ln\left(\frac{9}{8}\right).$$

8. Det är en separabel ekvation. Vi separerar variablerna först:

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx.$$

Därefter integrerar vi både leden. Vänsterledet ger oss

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}.$$

Högerledet ger oss

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)\,dx = x - 2\arctan x + C.$$

Alltså,

$$-\frac{1}{y} = x - 2\arctan x + C$$

vilket ger allmän lösning

$$y = -\left(x - \arctan x + C\right)^{-1}.$$

9. Vi undersöker funktionen

$$f(x) = (x+1)e^{-x} - 1.$$

Vi har $f(0) = 0$. Derivatan $f'(x)$ är

$$f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}.$$

Vi ser att $f' > 0$ för negativa x vilket ger oss att f är växande för negativa x. För positiva x vi har $f' < 0$ vilket visar att f är avtagande. Tillsammans sådana genskaper av f garanterar att punkten $x = 0$ är en global maximum punkt d v s $f(x) \le f(0)$ för alla reella x. Detta ger oss olikheten

$$(x+1)e^{-x} - 1 \le 0$$

vilket skulle bevisas.

10. Vi har

$$I_{n+1} = \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{n+3/2}\,dx = \left[\text{ partiellintegration }\right] = x\cdot\left(1-x^2\right)^{n+3/2}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} x\cdot d\left[\left(1-x^2\right)^{n+3/2}\right] =$$

$$= -\int_{-1}^{1} x\cdot(n+3/2)\,\left(1-x^2\right)^{n+1/2}\,(-2x)\,dx =$$

$$= (2n+3)\int_{-1}^{1} x^2\left(1-x^2\right)^{n+1/2}\,dx = (2n+3)\int_{-1}^{1}\left[1-\left(1-x^2\right)\right](1-x^2)^{n+1/2}dx =$$

$$= (2n+3)\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{n+1/2}\,dx - (2n+3)\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{n+3/2}\,dx = (2n+3)I_n - (2n+3)I_{n+1}.$$

Ur detta samband får vi

$$I_{n+1} = \frac{2n+3}{2n+4}I_n.$$

Nu räknar vi I_2. Vi har först

$$I_{-1} = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x|_{-1}^{1} = \pi.$$

Därefter,

$$I_0 = \frac{1}{2}I_{-1} = \frac{\pi}{2}; \qquad I_1 = \frac{3}{4}I_0 = \frac{3\pi}{8}; \qquad I_2 = \frac{5}{6}I_1 = \frac{15\pi}{48}.$$

11. Vi skriver om seriens termer:

$$a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+a}{n-1} = \frac{n(n-1)-(n+a)(n+1)}{n^2-1} = \frac{(-a-2)n-a}{n^2-1}.$$

Om $-a-2 \neq 0$, då har seriens termer samma beteende för stora n som termer $b_n = (-2-a)/n$ (d v s $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$). Serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2-a}{n}$$

divergerar eftersom det är icke-noll konstant gånger garmoniska serien. Detta visar att ursprungliga serien divergerar för $a \neq -2$.

Om $a = -2$, då $a_n = \frac{2}{n^2-1}$ och termer har samma beteendet för stora n som termer $b_n = \frac{2}{n^2}$. Eftersom serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

konvergerar, detta visar att ursprungliga serien konvergerar också för $a = -2$.

Nu räknar vi seriens summan för $a = -2$. Vi skriver om termerna igen:

$$a_n = \frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}.$$

Hela serien ser ut så här nu:

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

Man ser att alla termerna utom 1 i första parentes och 1/2 i andra parentes tar ut varandra vilket visar att seriens summa är $1 + 1/2 = 3/2$.

12. Tangentlinjen i punkten $x = 1$ har ekvation $y - 1 = y'(1)(x-1)$ eller $y = ax - a + 1$. Den egna volymen av glaset blir då

$$V_{\text{glas}} = 2\pi \int_0^1 x \cdot \left[x^a - (ax - a + 1)\right] dx = 2\pi \left(\frac{1}{a+2} - \frac{a}{3} + \frac{a-1}{2} \right).$$

Champagne ryms i rotationskroppen som uppstår efter rotation kring y-axeln av området begränsat av y-axeln, samma kurvan $y = x^a$ och den övre gränsen $y = 1$. Volymen av champagne blir då

$$V_{\text{champagne}} = 2\pi \int_0^1 x \cdot \left[1 - x^a\right] dx = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+2} \right).$$

Vi sätter nu $V_{\text{glas}} = V_{\text{champagne}}$ och efter ett antal beräkningar med bråk får vi svar $a = 4$.