Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1600, Differential- och integralkalkyl I, del 1.
Tentamen, lördagen den 15 mars 2008 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta.

För betyg E krävs minst 15 poäng på A-delen.
Totalt 20p varav minst 15p på A-delen ger betyg D.
Totalt 25p varav minst 15p på del A och 5p på del B ger betyg C.
Totalt 30p varav minst 15p på del A och 10p på del B ger betyg B.
Totalt 35p varav minst 15p på del A och 15p på del B ger betyg A.

Under kursen har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Följande tabell gäller:

Skrivning	KS1	HS1	KS2	HS2	KS3	HS3	KS4
Uppgift	1	3	4	7	6	5	8

DEL A

(3p) **1.** Funktionen

$$f(x) = x \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

är definierad för $x \neq 0$. Definiera $f(0)$ så att f blir kontinuerlig i origo. Räkna ut derivatan $f'(0)$ för den erhålna kontinuerliga funktionen.

(3p) **2.** Ekvationen

$$y = 2\sin(x+y)$$

definierar en kurva i (x, y)-planet som går genom origo. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan i origo.

(3p) **3.** Bestäm det största och det minsta värde som antas av funktionen

$$f(x) = 2\sqrt{x^2+1} - x$$

då $0 \leq x \leq 3$.

(3p) **4.** Räkna ut integralen

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{(e^x+1)^2}.$$

(3p) **5.** Bestäm värdet av sjätte derivatan i origo för funktionen

$$f(x) = \frac{\cos(x^2)}{1+x^2}.$$

(3p) **6.** Bestäm längden av kurvbågen

$$y = \frac{x^{3/2}}{3} - x^{1/2}$$

då $1 \leq x \leq 4$.

VÄND!

(3p) **7.** Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx.$$

(3p) **8.** Lös differentialekvationen

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} = (x^2-1)\cdot y^2.$$

DEL B

(5p) **9.** Bevisa olikheten

$$(x+1)e^{-x} \le 1$$

för alla reella x.

10. Betrakta integralen

$$I_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n+1/2}\,dx.$$

(3p) (a) Bestäm reduktionsformel som uttrycker I_{n+1} i I_n.

(2p) (b) Räkna ut I_2 m h av reduktionsformeln. (Ledning: börja med I_{-1}).

11. Undersök serien

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+a}{n-1}\right).$$

(3p) (a) För vilka värden på parametern a serien konvergerar?

(2p) (b) Bestäm seriens summa för sådana a.

(5p) **12.** En designer projekterar ett annorlunda champagneglas på följande sätt. Området begränsat av y-axeln, kurvan $y = x^a$ med något $a > 1$ och tangenten till kurvan i punkten $x = 1$ roterar ett varv kring y-axeln. Designern vill att den egna volymen av glaset blir presis lika med volymen av champagne som ryms i det. Vilket värde av a skall väljas då?

L Y C K A T I L L !