SF1600, lösningsförslag till tentamen 29 maj 2008

1. Funktionen är kontinuerlig på intervaller $(-\infty, 2)$ och $(2, \infty)$ eftersom den ges där av elementära uttryck. f blir kontinuerlig även i punkten $x = 2$ om $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x)$. Vi har $f(2) = 2 + b$. Vänster gränsvärdet då $x \to 2 - 0$ är samma tal. Vi undersöker nu höger gränsvärdet.

Om $a \neq 2$, då $x^2 - 3x + a \to a - 2 \neq 0$ då $x \to 2$. Detta ger oss oändligt höger gränsvärdet och funktionen är inte kontinuerlig. Om $a = 2$, då

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-1) = 1.$$

Alltså, f blir kontinuerlig i punkten $x = 2$ om $a = 2$ och $b + 2 = 1$ d v s $b = -1$.

2. Ekvation för normallinjen är $y - y_0 = k(x - x_0)$ där lutningen $k = -1/y'(x_0)$ där $x_0 = 1$ och $y_0 = 2$. För att bestämma $y'(1)$, använder vi oss av implicit derivering. Vi deriverar hela ekvationen och vi får

$$3x^2 + 3y^2y' = 3y + 3xy'$$

vilket ger oss

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Insättningen $x = 1$, $y = 2$ ger $y' = 1/3$. Då $k = -3$ och linjens ekvation är $y = -3x + 5$.

3. Vi räknar först derivatan:

$$y' = \frac{2x + 4}{(x^2 + 4)^{3/2}}.$$

$y' = 0$ i punkten $x = -2$ och det är inte svårt att inse att $y' < 0$ i intervallet $(-\infty, -2)$ där y är avtagande och $y' > 0$ i intervallet $(-2, +\infty)$ där y är växande. Detta visar att punkten $x = -2$ är en global minimum punkt. Det minsta värdet av y är $y(-2) = -\sqrt{2}$.

För att avgöra mögliga största värdet av y, kollar vi beteendet av y på gränserna. Vi har

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x(1 - 2/x)}{|x|\sqrt{1 + 4/x^2}} = -1$$

eftersom $|x| = -x$ för negativa x. Analogt får vi

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 4}} = 1.$$

Eftersom y är växande funktion på intervallet $(-2, \infty)$, sista gränsvärdet 1 antas inte av funktionen. Alltså, funktionen saknar sitt största värde.

4. Vi har

$$\int = \left[\text{ substitution } x = t^2 \right] = \int \arctan t \, d(t^2) = t^2 \arctan t - \int t^2 \, d(\arctan t) =$$

$$t^2 \arctan t - \int \frac{t^2}{t^2 + 1} \, dt = t^2 \arctan t - \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt =$$

$$t^2 \arctan t - t + \arctan t + C = (x + 1) \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$$

5. Taylorpolynom ges av formel

$$p(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2.$$

Vi har $f(2) = \ln 5$,

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{och} \quad f'(2) = \frac{4}{5}$$

och

$$f''(x) = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} \quad \text{och} \quad f''(2) = -\frac{6}{25}.$$

Alltså, Taylorpolynomet är

$$p(x) = \ln 5 + \frac{4}{5}(x-2) - \frac{3}{25}(x-2)^2.$$

6. Vi bestämmer först intervallet för variabel x. Funktionen är definierad om uttrycket under roten är positivt d v s $1 - x^2 \geq 0$. Detta ger oss $-1 \leq x \leq 1$ och vi väljer integrationsintervall $0 \leq x \leq 1$ p g a symmetri. Enligt standard formel, blir volymen

$$V = 2\pi \int_0^1 xy(x)\,dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt[4]{1-x^2}\,dx = \pi \int_0^1 \sqrt[4]{1-x^2}\,d(x^2) = \pi \int_0^1 (1-t)^{1/4}\,dt = -\frac{4}{5}\pi(1-t)^{5/4}\Big|_0^1 = \frac{4\pi}{5}.$$

7. Vi tillämpar kvotkriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+3)!}{\big((n+1)!\big)^3 4^{3n+3}} \cdot \frac{(n!)^3 4^{3n}}{(3n)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{\big(n+1\big)^3 4^3} =$$

$$= \big[\text{bryter ut } n^3 \text{ ur täjlaren och nämnaren}\,\big] = \frac{(3+3/n)(3+2/n)(3+1/n)}{\big(1+1/n\big)^3\,4^3}.$$

Uttrycket konvergerar mot $3^3/4^3$ då $n \to \infty$. Eftersom gränsvärdet är mindre än 1, kvotkriterium säjer att serien konvergerar.

8. Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 6r + 10 = 0.$$

Den har komplexa rötter $r_{1,2} = -3 \pm i$. Motsvarande allmän lösning till differentialekvationen är

$$y(x) = C_1 e^{-3x}\cos x + C_2 e^{-3x}\sin x.$$

Nu sätter vi in begynnelsevillkor för att bestämma C_1 och C_2. Vi har

$$0 = y(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = C_1$$

vilket ger

$$y(x) = C_2 e^{-3x}\sin x.$$

Därefter,

$$y'(x) = C_2\left(-3e^{-3x}\sin x + e^{-3x}\cos x\right)$$

och

$$1 = y'(0) = C_2.$$

Alltså,

$$y(x) = e^{-3x}\sin x.$$

9. Vi undersöker funktionen $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$. Vi har

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = 2\frac{x^3 - 1}{x^2}.$$

Vi ser att $f' > 0$ på intervallet $(1, \infty)$ där f är växande och $f'(x) < 0$ på intervallen $(-\infty, 0)$ och $(0, 1)$ där f är avtagande. Punkten $x = 1$ är alltsåen lokal minimumpunkt. Vi kollar nu beteendet av f vid oändligheten samt nära den singuljära punkten $x = 0$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = +\infty; \quad \lim_{x\to 0-0}\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = -\infty; \quad \lim_{x\to 0+0}\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = +\infty.$$

Hela undersökningen visar att på intervallet $(-\infty, 0)$ avtar funktionen f från $+\infty$ till $-\infty$; därefter på intervallet $(0, 1)$ avtar den från $+\infty$ till $f(1) = 3$ och äntligen på intervallet $(1, +\infty)$ växer funktionen från $f(1) = 3$ till $+\infty$. Tillammans detta ger följande svar till frågan: ekvationen $f(x) = a$ har endast en rot om $a < 3$, den har två rötter om $a = 3$ och den har tre rötter om $a > 3$.

10.

Standard formel säjer att arean är

$$A = 2\pi \int_0^{\pi/2} x\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx.$$

Vi har enligt integralkalkylens huvudsats

$$y'(x) = \sqrt{\cos x}$$

vilket ger

$$A = 2\pi \int_0^{\pi/2} x\sqrt{1 + \cos x}\, dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} x \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)\, dx = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi/2} x\, d\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\pi x \sin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} - 4\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\, dx = 2\pi^2 - 4\sqrt{2}\pi \cdot \left(-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\Big|_0^{\pi/2} = 2\pi^2 - 8\sqrt{2}\pi + 8\pi.$$

11. Efter substitutionen $x = e^{-t}$ integralen blir

$$\int_{+\infty}^{0} \frac{-\sin t}{e^{-t/2}} \cdot \left(-e^{-t}\right)\, dt = -\int_0^{\infty} e^{-t/2} \sin t\, dt.$$

Den här integralen konvergerar eftersom t ex den konvergerar absolut:

$$\int_0^{\infty} \left|e^{-t/2}\sin t\right|\, dt \le \int_0^{\infty} e^{-t/2}\, dt$$

och den sista integralen är konvergent. Värde av integralen räknas på standart sätt: antiderivatan är

$$-\frac{4}{5}e^{-t/2}\left(-\frac{1}{2}\sin t - \cos t\right)$$

(den finns t ex i BETA eller kan räknas ut m h av två partiella integrationer) och integralen blir

$$\left(-\frac{4}{5}e^{-t/2}\left(-\frac{1}{2}\sin t - \cos t\right)\right)\Big|_0^{\infty}.$$

Insättning av den övre gränsen innebär att räkna ut fränsvärdet då $t \to \infty$ som är lika med 0. Insättningen av den nedre gränsen $t = 0$ ger oss svar $-4/5$.

12. Efter byte av variabel $x = 1/t$ får vi

$$\lim = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t} \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}} - \frac{1}{t}\right)\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}(1 + 2t)^{1/2} - \frac{1}{t}\right)\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\left(1 + t - (2t)^2/8 + O(t^3)\right) - \frac{1}{t}\right)\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln\left(1 - \frac{t}{2} + O(t^2)\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}t + O(t^2)}{t} = -\frac{1}{2}.$$