Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1600, Differential- och integralkalkyl I, del 1.
Tentamen, den 9 mars 2009. Lösningsförslag.

1. Funktionen $y = f(x)$ definieras för $x > 0$, $x \neq 1$ som

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x}}{x-1}.$$

(a) Definiera $f(1)$ så att f blir kontinuerlig i punkten $x = 1$.
(b) Räkna ut $f'(1)$ för den erhålna kontinuerliga funktionen.

Lösning. För att funktionen var kontinuerlig i punkten $x = 1$ krävs det att $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$. För att räkna ut det sista gränsvärdet skriver vi först om funktionen genom att multiplicera både nämnaren och täljaren med summan

$$\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x}.$$

Vi får

$$f(x) = \frac{x+3-4x}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}\right)} = -\frac{3}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}}$$

och

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(-\frac{3}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}}\right) = -\frac{3}{4}.$$

Alltså, man skall välja $f(1) = -3/4$ för att f blir kontinuerlig i punkten $x = 1$.

För att räkna derivatan $f'(1)$, observerar vi att formeln

$$f(x) = -\frac{3}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}}$$

ger oss $f(x)$ för alla värdena av x inklusive $x = 1$ och då det räcker att räkna ut derivatan av uttrycket i högerled. Vi får

$$f'(x) = \frac{3}{\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}\right)^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

vilket ger oss

$$f'(1) = \frac{15}{64}.$$

2. Bestäm de punkter på kurvan

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8$$

där tangentlinjen är parallel med linjen $y = -x$ (d v s den har lutningen $k = -1$).

Lösning. Vi använder oss av implicit derivering. Kurvans ekvation skrivs om som

$$3x^2 + 2xy(x) + 3y(x)^2 = 8$$

och derivering av den ger oss

$$6x + 2y(x) + 2xy'(x) + 6y(x)y'(x) = 0$$

vilket ger

$$y'(x) = -\frac{6x + 2y}{2x + 6y} = -\frac{3x + y}{x + 3y}.$$

Lutningen av tangentlinjen är -1 i punkter där $y'(x) = -1$ och vi får ekvation

$$-\frac{3x + y}{x + 3y} = -1$$

vilket ger oss $y = x$. Insättningen av detta till kurvans ekvation ger

$$x^2 = 1$$

eller $x = \pm 1$. Detta ger svar: punkterna är $(-1, -1)$ och $(1, 1)$.

3. Bestäm värdemängden (range) till funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x}}$$

definierad för $x > 0$.

Lösning. Vi räknar först derivatan av f:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{3/2} + 3x^{-1/2}\right) = \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{3}{2}x^{-3/2} = \frac{3}{2}x^{-3/2}\left(x^2 - 1\right).$$

Formeln visar att $f'(x) > 0$ i intervallet $(1, +\infty)$ där $f(x)$ är växande och $f'(x) < 0$ i intervallet $(0, 1)$ där $f(x)$ är avtagande. Allt detta visar att punkten $x = 1$ är en global minimum punkt till $f(x)$.

Dessutom får vi kolla gränserna av definitionsintervallet $(0, +\infty)$. Vi har

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x^{3/2} + 3x^{-1/2}\right) = 0 + \infty = +\infty$$

och analogt $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Vi avgör att värdemängden är intervallet $[f(1), +\infty) = [4, +\infty)$.

4. Beräkna derivatan av funktionen

$$g(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^t\,dt}{t}.$$

Lösning. Låt $F(x)$ vara antiderivatan till funktionen $f(x) = e^x/x$ d v s

$$F'(x) = \frac{e^x}{x}.$$

Enligt integralkalkylens huvudsats (Newton-Leibniz formel)

$$g(x) = F(2\ln x) - F(\ln x).$$

Derivatan $g'(x)$ blir då

$$g'(x) = F'(2\ln x)\cdot\frac{2}{x} - F'(\ln x)\cdot\frac{1}{x} =$$
$$= \frac{e^{2\ln x}}{2\ln x}\cdot\frac{2}{x} - \frac{e^{\ln x}}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

5. Räkna ut integralen

$$\int \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})^2}.$$

Lösning. Vi byter variabler i integralen:

$$y = \sqrt{x}; \quad x = y^2; \quad dx = d(y^2) = 2y\,dy.$$

Integralen blir då

$$\int \frac{2y\,dy}{y^2(1+y)^2} = \int \frac{2}{y(1+y)^2}\,dy.$$

Nu söker vi partiellbråkuppdelningen av bråket son integraras:

$$\frac{2}{y(1+y)^2} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y} + \frac{C}{(1+y)^2}.$$

Handpålägningsmetoden ger oss

$$A = \left.\frac{2}{(1+y)^2}\right|_{y=0} = 2;$$

$$C = \left.\frac{2}{y}\right|_{y=-1} = -2.$$

Äntligen, insättningen av $y = 1$ ger oss

$$\frac{1}{2} = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{4} = 2 + \frac{B}{2} - \frac{1}{2},$$

varav $B = -2$. Integrering av rationala funktionen ger oss

$$\int \frac{2}{y(1+y)^2}\,dy = \int \left(\frac{2}{y} - \frac{2}{1+y} - \frac{2}{(1+y)^2}\right) dy = 2\ln y - 2\ln(1+y) + \frac{2}{1+y} + C.$$

Insättningen tillbacka $y = \sqrt{x}$ ger oss svar

$$\ln x - 2\ln(1+\sqrt{x}) + \frac{2}{1+\sqrt{x}} + C.$$

6. Räkna ut gränsvärdet

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\ln(2x-1) + \frac{2}{\pi}\sin(\pi x)}{(x-1)^3}.$$

Lösning. Efter bytet av variabler $x = t + 1$ gränsvärdet blir

$$\lim_{t \to 0} \frac{(1+t)\ln(1+2t) - \frac{2}{\pi}\sin(\pi t)}{t^3}.$$

Nu använder vi oss av Taylorsutvecklingar. Vi har

$$(1+t)\ln(1+2t) = (1+t)\left(2t - \frac{(2t)^2}{2} + \frac{(2t)^3}{3} + o(t^3)\right) =$$
$$= (1+t)\left(2t - 2t^2 + \frac{8}{3}t^3 + o(t^3)\right) = 2t + \frac{2}{3}t^3 + o(t^3).$$

och

$$\frac{2}{\pi}\sin(\pi t) = \frac{2}{\pi}\left(\pi t - \frac{(\pi t)^3}{3!} + o(t^3)\right) = 2t - \frac{\pi^2}{3}t^3 + o(t^3).$$

Detta ger oss

$$\frac{(1+t)\ln(1+2t) - \frac{2}{\pi}\sin(\pi t)}{t^3} = \frac{\frac{2}{3}t^3 + \frac{\pi^2}{3}t^3 + o(t^3)}{t^3} = \frac{2+\pi^2}{3} + o(1)$$

och gränsvärdet blir

$$\frac{2+\pi^2}{3}.$$

7. Området som ligger mellan kurvor $y = x^2$ och $y = 18 - x^2$ roterar ett varv kring y-axeln. Bestäm volymen av erhållen rotationskropp.

Lösning. Skärningspunkter mellan kurvor ges av ekvation $x^2 = 18 - x^2$ vilket ger oss $x = \pm 3$. Volymen blir då

$$V = 2\pi \int_0^3 x \cdot \left(18 - x^2 - x^2\right)\, dx = 2\pi \int_0^3 \left(18x - 2x^3\right)\, dx =$$
$$= 2\pi \left(9x^2 - \frac{1}{2}x^4\right)\Bigg|_0^3 = 2\pi\left(81 - \frac{81}{2}\right) = 81\pi$$

8. Lös differentialekvationen

$$y' = \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

tillsammans med begynnelsevillkor $y(0) = 1$.

Lösning. Det är en separabel ekvation. Vi skriver om den i form

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

och integrerar båda leden. Vi får

$$-\frac{1}{y} = \arcsin x + C$$

vilket ger

$$y(x) = -\frac{1}{\arcsin x + C}.$$

Insättningen av begynnelsevillkor $x = 0$, $y = 1$ ger

$$1 = -\frac{1}{\arcsin 0 + C} = -\frac{1}{C}$$

varav $C = -1$. Alltså,

$$y(x) = \frac{1}{1 - \arcsin x}.$$

9. Visa att generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{(x+1)^2}\, dx$$

konvergerar och bestäm dess värde.

Lösning. Den enda singulära punkten är ∞. Integralen kovergerar där eftersom

$$\frac{\arctan x}{(x+1)^2} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^2}$$

och den sista funktionen är en standard funktion vars integral konvergerar nära ∞.

Nu räknar vi integralen:

$$\int = \int_0^\infty \arctan x\, d\left(-\frac{1}{x+1}\right) = [\text{ partiellintegration }] =$$
$$= -\frac{\arctan x}{x+1}\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{x+1}\, d(\arctan x) = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}.$$

Partiellbråkuppdelningen ger oss

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1/2}{x+1} + \frac{-1/2x + 1/2}{x^2+1}$$

och integrering ger

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{1}{2}\arctan x.$$

Äntligen,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{1}{2}\arctan x\right)\bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

10. För vilka värden på parametern $a > 0$ konvergerar serien

$$\sum_{n=2}^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{n^a - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^a + 1}}\right) \qquad ?$$

Lösning. Vi skriver om seriens termer:

$$a_n = (n^a - 1)^{-1/2} - (n^a + 1)^{-1/2} = n^{-a/2} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{n^a}\right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{1}{n^a}\right)^{-1/2} \right).$$

Eftersom $a > 0$, bråket $1/n^a$ går mot 0 då $n \to \infty$. Binomialformeln ger oss då

$$\left(1 - \frac{1}{n^a}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2n^a} + O\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)$$

och

$$\left(1 + \frac{1}{n^a}\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2n^a} + O\left(\frac{1}{n^{2a}}\right).$$

Vi får

$$a_n = n^{-a/2} \left(\frac{1}{n^a} + O\left(\frac{1}{n^{2a}}\right) \right) = \frac{1}{n^{3a/2}} + O\left(\frac{1}{n^{5a/2}}\right).$$

Den första termen är avgörande och seriens konvergens/divergens är samma som för serien med termer $b_n = 1/n^{3a/2}$ (eftersom både är positiva och det är lätt att kolla att $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$). Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3a/2}}$$

är standard och den konvergerar om $3a/2 > 1$ vilket ger oss svar $a > 2/3$.

11. Finns det något värde på parametern b så att ekvationen

$$\frac{x^4 + 2}{(x-2)^4} = b$$

har tre olika reella lösningar?

Lösning. Vi undersöker funktionen m h av derivatan. Vi har

$$f'(x) = -8\frac{x^3 + 1}{(x-2)^5}.$$

Derivatan är positiv på intervallet $(-1, 2)$ där f blir växande och f' är negativ på intervaller $(-\infty, -1)$ och $(2, \infty)$ där f blir avtagande. Vi räknar också gränsvärdena

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^4}}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^4} = 1$$

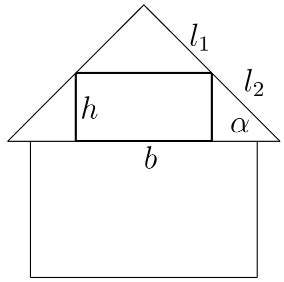
och

$$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty.$$

Undersökningen ovan visar då att $f(x)$ på intervallet $(-\infty, -1)$ avtar från gränsvärdet 1 (som antas inte) till minimumvärdet $f(-1) = 1/27$. Därefter på intervallet $(-1, 2)$ funktionen $f(x)$ växer från $f(-1) = 1/27$ till $+\infty$ och på intervallet $(2, \infty)$ avtar $f(x)$ från $+\infty$ till gränsvärdet 1 som antas inte.

Sådana egenskaper visar att ekvationen $f(x) = b$ kan ha högst 2 olika lösningar.

12. En designer projekterar ett trähus med ett litet mansardrum under taket (se bilden nedan). Rummet skall ha bredden $b = 4m$ och höjden $h = 2m$. Bestäm minsta möjliga längden l av en sida av taket över huset (taket är symmetriskt).



Lösning. Vi betecknar med α vinkeln mellan taket och vågrät riktningen och delar sidan av taket till två delar, den första över rummet med längden l_1 och den andra till höger om rummet med längden l_2 så att $l = l_1 + l_2$. Enligt plangeometri,

$$l_1 = \frac{b/2}{\cos\alpha} \qquad \text{och} \qquad l_2 = \frac{h}{\sin\alpha}$$

så att

$$l = l(\alpha) = \frac{b/2}{\cos\alpha} + \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha} + \frac{2}{\sin\alpha}.$$

Det är funktion som skall minimiseras på intervallet $(0, \pi/2)$. Vi observerar först att

$$\lim_{\alpha\to 0} l(\alpha) = \lim_{\alpha\to\pi/2} l(\alpha) = \infty$$

vilket visar att minsta värdet av $l(\alpha)$ antas i punkt där $l'(\alpha) = 0$. Vi har

$$l'(\alpha) = \frac{2}{\cos^2\alpha}\cdot\sin\alpha - \frac{2}{\sin^2\alpha}\cdot\cos\alpha = 2\frac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}.$$

Derivatan är 0 i punkten där $\sin^3\alpha = \cos^3\alpha$ vilket ger $\tan\alpha = 1$ och $\alpha = \pi/4$.

Vi får äntligen

$$l_{\min} = l(\pi/4) = 4\sqrt{2}.$$